

## Sommaire

Introduction élémentaire.....	3
I. Présentation.....	3
A. But et objets de la quantique.....	3
B. Une différence entre mécanique classique et mécanique quantique.....	3
C. La constante quantique.....	3
II. Le critère quantique.....	3
A. Action.....	3
B. Domaine de validité de la quantique.....	4
III. Quelques principes de quantique.....	10
Chap 1: Onde-Particule (le Quanton).....	11
I. L'aspect particulaire de la lumière : le photon.....	11
A. Préliminaire historique.....	11
B. L'effet photoélectrique.....	11
1 Le montage.....	11
2 Les paramètres.....	12
3 Les observations expérimentales et leur interprétation.....	12
a) Observation 1 : I pour des fréquences $\nu$ basses (pour un métal déterminé).....	12
b) Observation 2 : I en fonction de la tension U (pour un métal déterminé, $\nu > \nu_0$ , $\Phi$ constant).....	13
c) Observation 3 : courbes de Millikan c'est à dire $U_a$ en fonction de la fréquence $\nu$ (pour différents métaux).....	14
d) Observation 4 : Influence du flux lumineux $\Phi$ .....	14
C. La « carte d'identité » du photon.....	15
1 Vitesse.....	15
2 Masse.....	15
3 Énergie.....	15
4 Impulsion ou quantité de mouvement.....	15
5 Conclusion.....	15
II. L'aspect ondulatoire des particules de matière.....	18
A. Préliminaire historique.....	18
B. La diffraction d'électrons lents.....	20
1 Le matériel.....	21
2 Interprétation : analogie avec des réseaux optiques.....	22
3 Les paramètres.....	23
4 Conclusion.....	24
III. Quantons.....	29
A. Vocabulaire.....	29
B. L'expression à éviter : « dualité onde-particule ».....	30
Chap 2 : Introduction au formalisme quantique.....	32
I. Fonction d'onde.....	32
A. Expériences d'interférence.....	32
1 Avec la lumière : trous ou fentes de Young.....	32
a) Rappels qualitatifs obtenus en optique ondulatoire.....	32
b) L'expérience d'interférence à un seul photon.....	32
Description de l'expérience.....	32
Nécessité d'une interprétation probabiliste.....	33
2 Avec des particules matérielles.....	33
a) Résultats.....	33
b) Commentaires.....	35
Superposition d'états.....	35

Densité de probabilité.....	35
Trajectoire de la particule.....	35
3 Définitions.....	36
a) Définitions générales.....	36
b) Cas plus simple.....	36
<b>II. Inégalité spatiale de Heisenberg.....</b>	<b>46</b>
A. Introduction.....	46
B. Analogie : diffraction des ondes lumineuses.....	47
1 Les résultats de l'expérience.....	47
2 Interprétation quantique de la diffraction par une fente.....	48
C. Commentaires.....	49
D. Complément : notion de dispersion statistique.....	52
<b>Chap III : Quantification de l'énergie.....</b>	<b>56</b>
<b>I. Le modèle planétaire de Niels Bohr.....</b>	<b>56</b>
A. Les hypothèses de Bohr.....	56
B. La réussite du modèle.....	56
C. L'évolution de Bohr vers la quantique.....	56
D. Les limites du modèle.....	60
<b>II. Modèle du puits de potentiel unidimensionnel de profondeur infinie.....</b>	<b>61</b>
A. Étude classique du problème.....	61
B. Étude quantique du problème.....	62
1 Existence d'une énergie minimale de confinement.....	62
a) Expression en utilisant l'inégalité de Heisenberg.....	62
b) Effet du confinement sur l'énergie cinétique.....	63
2 Expression des niveaux d'énergie.....	63
3 Lien entre confinement spatial et quantification.....	65

# INTRODUCTION À LA PHYSIQUE QUANTIQUE (MATHS SUP)

## Introduction élémentaire

### I. Présentation

#### A. But et objets de la quantique

L'objectif de la quantique est de décrire des objets de taille atomique ou subatomique. Elle fut développée au début du 20ème siècle dans le but de comprendre des résultats expérimentaux que la mécanique classique échouait à expliquer.

La théorie quantique est donc essentielle en physique des particules, nucléaire, physique atomique, moléculaire et physique du solide. Par ailleurs, comme les phénomènes macroscopiques résultent du comportement collectifs des objets microscopiques, la théorie quantique a des conséquences indirectes mais essentielles à l'échelle macroscopique.

#### B. Une différence entre mécanique classique et mécanique quantique

Un changement radical entre la mécanique quantique et la mécanique classique est que en mécanique classique, à une dimension, une particule est un objet ponctuel décrit par un point  $(x, p)$  dans l'espace des phases (position - vitesse), alors que en mécanique quantique, une particule est un objet étendu, décrit par une fonction d'onde  $\psi(x, t)$ .

Le rôle de la mécanique est de donner les lois qui gouvernent l'évolution de ces objets. Ce sont les équations de Hamilton (ou Newton) dans le cas classique et l'équation de Schrödinger dans le cas quantique.

#### C. La constante quantique

Les phénomènes quantiques sont caractérisés par leur dépendance à la constante fondamentale  $\hbar$ . Sa valeur numérique dans le système SI est de l'ordre de  $\hbar \approx 10^{-34} SI$ . Historiquement, ce n'est pas  $\hbar$  mais  $h = 2\pi\hbar$  qui fut introduite par Planck en physique autour de 1900 pour rendre compte du rayonnement du corps noir. La constante de Planck vaut:  $h = 6.626 \cdot 10^{-34} SI$ .

### II. Le critère quantique

#### A. Action

La dimension de  $\hbar$  est :

$$[\hbar] = \mathcal{M} \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-1}$$

$$[\hbar] = [masse] \times [longueur]^2 \times [temps]^{-1}$$

que l'on peut écrire aussi :

$$[\hbar] = \mathcal{M} \mathcal{L} \mathcal{T}^{-1} \times \mathcal{L}$$

$$[\hbar] = [\text{quantité de mouvement}] \times [\text{longueur}]$$

ou encore :

$$[\hbar] = \mathcal{M} \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-2} \times \mathcal{T}$$

$$[\hbar] = [\text{énergie}] \times [\text{temps}]$$

ou encore, puisque les angles sont sans dimension :

$$[\hbar] = \mathcal{L} \times \mathcal{M} \mathcal{L} \mathcal{T}^{-1}$$

$$[\hbar] = [\text{moment cinétique}] \times [\text{angle}]$$

$$[\hbar] = [\text{moment cinétique}]$$

Toute grandeur de dimension  $\mathcal{M} \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-1}$  est appelée action  $A$ .

## B. Domaine de validité de la quantique

La constante quantique  $\hbar$  est l'étalon pour déterminer si un système physique relève ou non de la quantique. Si pour le système, les grandeurs physiques de type action sont très supérieures à  $\hbar$ , on se trouve dans le domaine de validité de la mécanique classique. Mais lorsque l'action caractéristique du phénomène est de l'ordre de  $\hbar$ , le recours à la quantique est obligatoire.

**Exercice 1**

L'étude de l'atome d'hydrogène nécessite-t-elle la physique quantique ?

1) L'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène obtenue expérimentalement au début du vingtième siècle vaut  $E_H = 13,6 \text{ eV}$ . Traduire cette valeur numérique dans le système SI.

2) Pour choisir un temps caractéristique de l'onde lumineuse émise lors du retour de l'atome ionisé à son état fondamental, on peut prendre par exemple le quart de période. On adopte plutôt ici l'inverse de la pulsation  $\omega^{-1}$  de cette onde (utiliser la pulsation élimine souvent des coefficients  $2\pi$  superflus). À quoi correspond le temps caractéristique ainsi défini ?

3) La longueur d'onde minimale du spectre d'émission de l'atome d'hydrogène vaut  $\lambda = 100 \text{ nm}$  (ultra-violet). Calculer la valeur numérique de  $\omega$ .

4) En utilisant le critère quantique, montrer que l'étude de l'atome d'hydrogène doit recourir à la quantique.

Réponses

$$1) E_H = 13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}$$

$$E_H = 2,2 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$2) \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega^{-1} = \frac{T}{2\pi}$$

C'est donc la durée pour que la phase évolue de  $1 \text{ radian}$ .

(  $T/4$  est la durée pendant laquelle la phase évolue de  $\pi/2 = 1,57 \text{ radians}$  ).

$$3) \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ et :}$$

$$\lambda = c T$$

d'où :

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$\omega = 1,9 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$$

4) L'action caractéristique s'écrit donc :

$$A = E_i / \omega$$

$$A = 1,2 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

$$A \approx \hbar$$

L'atome d'hydrogène doit s'étudier en mécanique quantique.

**Exercice 2**

Pour décrire l'atome d'hydrogène, on dispose de trois grandeurs :

- la masse de l'électron  $m=0,91 \times 10^{-30} \text{ kg}$

- le coefficient intervenant dans l'expression de la force coulombienne noté

$$K = e^2 / 4 \pi \epsilon_0 = 2,30 \times 10^{-28} \text{ SI}$$

- la constante  $\hbar = 1,054 \times 10^{-34} \text{ J s}$  (puisque l'atome relève de la mécanique quantique)

À l'aide de l'analyse dimensionnelle, former une énergie, une longueur, une vitesse à partir de ces trois grandeurs. Calculer les valeurs numériques. Commenter.

Réponses

Dimensions des trois grandeurs données :

$$[m] = \mathcal{M}$$

$$[\hbar] = \mathcal{M} \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-1}$$

$$[K] = \mathcal{M} \mathcal{L}^3 \mathcal{T}^{-2}$$

Former une énergie :

$$[\text{énergie}] = \mathcal{M} \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-2}$$

Résolution :

On pose trois inconnues  $\alpha, \beta, \gamma$  pour que :

$$[\text{énergie}] = [m]^\alpha [K]^\beta [\hbar]^\gamma$$

$$[\text{énergie}] = (\mathcal{M})^\alpha (\mathcal{M} \mathcal{L}^3 \mathcal{T}^{-2})^\beta (\mathcal{M} \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-1})^\gamma$$

Par identification, on doit donc résoudre :

$$\mathcal{M}^{(\alpha+\beta+\gamma)} = \mathcal{M}^1$$

$$\mathcal{L}^{(3\beta+2\gamma)} = \mathcal{L}^2$$

$$\mathcal{T}^{(-2\beta-\gamma)} = \mathcal{T}^{-2}$$

soit :

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (1)$$

$$3\beta + 2\gamma = 2 \quad (2)$$

$$-2\beta - \gamma = -2 \quad (3)$$

De (2) et (3), on tire immédiatement :

$$\beta = 2$$

puis

$$\gamma = -2$$

en reportant dans (1)

$$\alpha = 1$$

finalement

$$[\text{énergie}] = \frac{[m][K]^2}{[\hbar]^2}$$

$$\text{énergie} = \frac{m K^2}{\hbar^2}$$

$$\text{énergie} = \frac{m e^4}{16 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}$$

dont la valeur numérique est :

$$\text{énergie} = \frac{(9,1 \times 10^{-31}) \times (2,30 \times 10^{-28})^2}{(1,054 \times 10^{-34})^2}$$

$$\text{énergie} = 4,4 \times 10^{-18} \text{ J}$$

On a obtenu le double de  $E_H$  .

On pourrait effectivement montrer que :

$$E_H = \frac{m e^4}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = 13,6 \text{ eV}$$

Former une longueur :

$$[\text{longueur}] = \mathcal{L}$$

$$[\text{longueur}] = \frac{[\hbar]^2}{[m][K]}$$

$$\text{longueur} = \frac{\hbar^2}{m K}$$

$$\text{longueur} = \frac{4 \pi \epsilon_0 \hbar^2}{m e^2}$$

dont la valeur numérique est :

$$\text{longueur} = \frac{(1,054 \times 10^{-34})^2}{(9,1 \times 10^{-31}) \times (2,30 \times 10^{-28})}$$

$$\text{longueur} = 53 \times 10^{-12} \text{ m}$$

On a obtenu (sans avoir à ajouter cette fois un facteur constant), le rayon  $a_0$  de l'atome d'hydrogène dans l'état fondamental, obtenu par Niels Bohr, ou rayon de Bohr.

On a donc :

$$a_0 = \frac{4 \pi \epsilon_0 \hbar^2}{m e^2}$$

Former une vitesse :

$$[\text{vitesse}] = \mathcal{L} \mathcal{T}^{-1}$$

$$[\text{vitesse}] = \frac{[K]}{[\hbar]}$$

$$\text{vitesse} = \frac{K}{\hbar}$$

$$\text{vitesse} = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 \hbar}$$

dont la valeur numérique est :

$$\text{vitesse} = \frac{(2,30 \times 10^{-28})}{(1,054 \times 10^{-34})}$$

$$\text{vitesse} = 2,2 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$$

On remarque que cette vitesse typique de l'électron dans l'atome est environ 140 fois plus faible que la vitesse de la lumière, ce qui justifie a posteriori que l'on ne doit pas, en première approximation, faire intervenir la théorie de la relativité.

On a donc :

$$v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}$$

### Exercice 3

Planck a proposé un nouveau système d'unités où les anciennes unités étaient remplacés par des grandeurs définies uniquement par les constantes universelles :

$c$  (vitesse de la lumière dans le vide),

$G$  (constante des interactions gravitationnelles) et

$\hbar$  la nouvelle constante.

1) Par une analyse dimensionnelle combinant  $c$ ,  $G$  et  $\hbar$ , retrouver la durée  $\tau_p$ , la longueur  $l_p$  et l'énergie  $\epsilon_p$  de Planck.

2) On donne :

$$\hbar = 1,054 \times 10^{-34} \text{ S.I.}$$

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ S.I.}$$

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ S.I.}$$

Calculer  $\tau_p$ ,  $l_p$ ,  $\epsilon_p$ .

Réponses

1)

On a déjà vu :

la dimension de  $\hbar$  est :

$$[\hbar] = \mathcal{M} \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-1}$$

$$[\hbar] = [\text{masse}] \times [\text{longueur}]^2 \times [\text{temps}]^{-1}$$

On a aussi :

la dimension de  $c$  est :

$$[c] = \mathcal{L} \mathcal{T}^{-1}$$

$$[c] = [\text{longueur}] \times [\text{temps}]^{-1}$$

On obtient facilement

la dimension de  $G$  est :

$$[G] = \mathcal{M}^{-1} \mathcal{L}^3 \mathcal{T}^{-2}$$

$$[G] = [\text{masse}]^{-1} \times [\text{longueur}]^3 \times [\text{temps}]^{-2}$$

Résultats

$$\tau_p = \left( \frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2}$$

puis

$$l_p = c \tau_p$$

$$l_p = \left( \frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2}$$

et

$$\varepsilon_p = \frac{\hbar}{\tau_p}$$

$$\boxed{\varepsilon_p = \left( \frac{\hbar c^5}{G} \right)^{1/2}}$$

2)

$$\tau_p = \left( \frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2}$$

$$\tau_p = \left( \frac{(1,054 \times 10^{-34}) \times (6,67 \times 10^{-11})}{(3,00 \times 10^8)^5} \right)^{1/2}$$

$$\boxed{\tau_p = 5,4 \times 10^{-44} \text{ s}}$$

$$l_p = c \tau_p$$

$$l_p = (3,00 \times 10^8) \times (5,38 \times 10^{-44})$$

$$\boxed{l_p = 1,61 \times 10^{-35} \text{ m}}$$

$$\varepsilon_p = \frac{\hbar}{\tau_p}$$

$$\varepsilon_p = \frac{1,054 \times 10^{-34}}{(5,38 \times 10^{-44})}$$

$$\boxed{\varepsilon_p = 1,96 \times 10^9 \text{ J}}$$

### III. Quelques principes de quantique

---

La « réalité » décrite par la quantique est très bizarre. Le monde de l'infiniment petit est un univers contre-intuitif. On cite très rapidement quelques principes de la quantique dont certains seront étudiés, plus en détail, dans la suite.

#### 1) Le principe de superposition

Un système quantique peut exister simultanément dans plusieurs états différents jusqu'à ce qu'il soit mesuré. La superposition quantique est bien de nature paradoxale.

#### 2) La « dualité onde-corpuscule » (*expression à éviter*)

Les particules subatomiques peuvent se comporter à la fois comme des ondes et comme des corpuscules bien qu'elles ne soient ni des ondes, ni des corpuscules.

#### 3) Les inégalités de Heisenberg

Il est impossible de déterminer avec une précision arbitraire certaines paires de grandeurs physiques. Il existe alors une limite fondamentale à notre capacité à connaître et à prédire le comportement des systèmes quantiques.

#### 4) L'indéterminisme quantique

Dans le monde quantique, nous ne pouvons prédire que la probabilité d'un résultat particulier.

#### 5) L'effet tunnel

L'effet tunnel est un phénomène quantique contre-intuitif qui permet aux particules de traverser des barrières d'énergie qu'elles ne pourraient pas franchir selon les lois de la physique classique.

#### 6) La non-localité quantique

ou intrication quantique. Lorsque deux particules sont intriquées, leurs états quantiques sont liés, quelle que soit la distance qui les sépare. La mesure effectuée sur une particule affecte instantanément l'état de sa particule intriquée, même si elles sont séparées par de grandes distances.

#### 7) La décohérence quantique

Les systèmes quantiques perdent progressivement leurs propriétés quantiques en interagissant avec leur environnement.

# Chap 1: Onde-Particule (le Quanton)

## I. L'aspect particulaire de la lumière : le photon

### A. Préliminaire historique

Au 19ème siècle, la théorie ondulatoire de la lumière semble définitivement admise. La lumière est donc une onde. Grâce à cette approche, on explique tous les phénomènes en optique. Pourtant, les théories classiques de la physique se révèlent, au début du vingtième siècle, incapables d'expliquer divers phénomènes tels le rayonnement du corps noir ou l'effet photoélectrique...etc

À la fin du 19ème siècle, sont effectués des expériences et travaux théoriques sur le rayonnement émis par des corps chauds. Tous les corps rayonnent de l'énergie électromagnétique en fonction de leur température. Ce type de rayonnement est relié à un rayonnement « modèle » appelé rayonnement du corps noir, le corps noir étant un corps idéal qui a la propriété d'absorber toutes les radiations (quelle que soit la fréquence). A l'équilibre thermique ce corps émet lui aussi un rayonnement mais, à température ambiante, aucune radiation n'est émise dans le visible ce qui lui donne cet aspect noir.

Pour fabriquer ce corps noir, on peut réaliser une enceinte fermée, dont les parois sont constituées d'un matériau quelconque. Cette enceinte est maintenue à une température uniforme. Dans cette enceinte isotherme, le rayonnement en équilibre thermique ou rayonnement du corps noir ne dépend que de la température et pas du matériau utilisé.

L'analyse physique de ce rayonnement consiste à déterminer l'énergie rayonnée par le corps noir. On étudie le flux élémentaire surfacique  $d\Phi$  dans la bande de fréquence compris entre  $\nu$  et  $\nu+d\nu$  :  $d\Phi = \varphi_\nu d\nu$ . L'allure de la courbe expérimentale représentant  $\varphi_\nu$  en fonction de la fréquence  $\nu$  a posé de sérieux problèmes aux physiciens de la fin du 19ème siècle jusqu'au début du 20ème siècle (voir : la catastrophe ultraviolette).

Finalement, le physicien allemand Max Planck pour résoudre le problème considère que, du fait des multiples réflexions du rayonnement sur les parois du corps noir, des ondes stationnaires s'établissent dans la cavité. Planck assimile ce système à un ensemble d'oscillateurs harmoniques d'énergies quantifiées ( $nE$ , avec  $n$  entier) et proportionnelles aux fréquences  $\nu$ . Il obtient alors une formule satisfaisante en postulant une relation de proportionnalité entre  $E$  et la fréquence émise  $\nu$  du type  $E = h\nu$  ou encore  $E = \hbar\omega$  (appelé quantum d'énergie).

Les deux concepts physiques : énergie et pulsation étaient jusque là totalement disconnectés puisque en physique classique, l'énergie transportée par la lumière monochromatique (onde électromagnétique) est proportionnelle au carré de l'amplitude maximale du champ électrique sans lien avec la fréquence de l'onde.

Max Planck considère en fait l'introduction de  $E = h\nu$  comme un auxiliaire mathématique sans réel contenu physique.

En résumé, la théorie de Planck revient à postuler que l'échange d'énergie entre la matière et le rayonnement de fréquence  $\nu$  se fait sous forme discrète, par quanta  $E = h\nu = \hbar\omega$

### B. L'effet photoélectrique

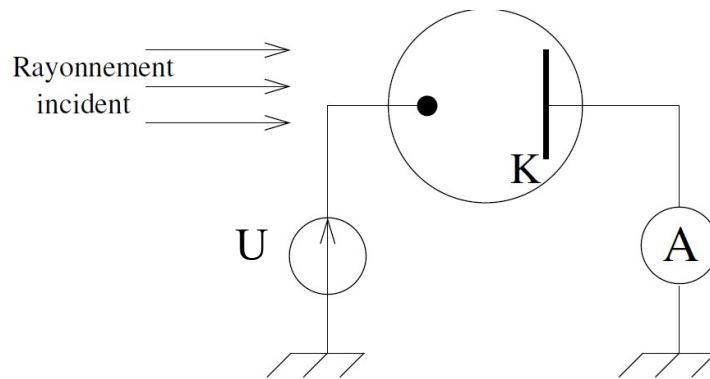
L'effet photoélectrique est découvert par Hertz en 1896 mais interprété par Einstein en 1905 qui s'inspire des travaux de Planck sur le corps noir.

Hertz remarque qu'un métal (en l'occurrence du zinc) peut émettre des charges négatives (électrons) lorsqu'il est éclairé par des radiations ultraviolettes.

#### 1 Le montage

Pour étudier quantitativement cet effet on peut utiliser le montage ci-dessous. Sous l'action d'un rayonnement des électrons peuvent être arrachés de la cathode ( $K$ ). Ceux-ci sont attirés par l'anode. On pose

$U = V_{anode} - V_{cathode}$ , cathode et anode étant placées dans une ampoule à vide. On peut alors mesurer l'intensité du courant  $I$  qui s'établit à l'aide de l'ampèremètre (A).



## 2 Les paramètres

A priori, le photocourant  $I$  dépend de la tension  $U$ , de la puissance du faisceau monochromatique incident  $\Phi$ . On sait que, pour arracher un électron, il faut fournir de l'énergie notée ici  $W_0$  (travail d'extraction qui dépend du métal utilisé pour la cathode).

On constate encore expérimentalement que  $I$  dépend de la fréquence  $\nu$  de la lumière.

En résumé :

$$I = I(U, W_0, \Phi, \nu)$$

## 3 Les observations expérimentales et leur interprétation

### a) Observation 1 : $I$ pour des fréquences $\nu$ basses (pour un métal déterminé)

L'émission d'électrons ne se produit que si la fréquence  $\nu$  du rayonnement monochromatique tombant sur le métal est supérieure à une fréquence seuil  $\nu_0$  caractéristique du métal considéré.

$I = 0$  pour  $\nu < \nu_0$  quels que soient le flux lumineux  $\Phi$  et la tension  $U$ .

L'émission se produit pour  $\nu > \nu_0$ .

L'émission est alors instantanée.

Ces faits sont en contradiction avec la théorie classique pour laquelle l'énergie transportée par le rayonnement incident est indépendante de la fréquence. Dans la théorie ondulatoire classique, on aurait pu imaginer que l'énergie de l'onde soit progressivement accumulée dans le métal si bien qu'au bout d'un certain temps des électrons puissent s'échapper.

Mais alors, l'émission photoélectrique ne serait plus instantanée.

### Interprétation 1 : interprétation d'Einstein

#### a) Le photon

Einstein s'inspire des travaux de Planck sur le corps noir en faisant appel au quantum d'énergie. Mais contrairement à Planck, il attribue une réalité au quantum d'énergie  $h\nu$ . Il appelle photons ces grains de lumière qui transportent l'énergie lumineuse.

$E = h\nu$  représente l'énergie du photon associée à la lumière de fréquence  $\nu$ .

#### b) La formule d'Einstein

Pour expliquer les observations ci-dessus, Einstein imagine que les photons en arrivant sur le métal cèdent leur énergie  $h\nu$  qui est alors fournie à un électron. Si cette énergie est suffisante, c'est à dire supérieure au travail

d'extraction  $W_0$ , elle permet à l'électron de vaincre les forces qui le retiennent au métal et d'acquérir une énergie cinétique  $E_c$ . L'énergie maximale à laquelle les électrons pourront être éjectés de la cathode est donnée par la formule :

$$h\nu = W_0 + E_{c, cathode, max}$$

où  $W_0$  est le travail d'extraction et  $E_{c, cathode, max}$  l'énergie cinétique maximale des électrons à la sortie du métal.

Les électrons qui quittent la cathode avec la vitesse normale (ils ne sont pas tous initialement dirigés vers l'électrode collectrice) la plus élevée sont ceux qui se trouvent immédiatement à la surface et qui ont été excités normalement à celle-ci. Un électron en provenance d'une couche profonde possède moins d'énergie au moment de son expulsion car du travail supplémentaire est nécessaire pour l'extraire depuis une couche profonde.

Avec ce modèle, Einstein explique la présence d'une fréquence seuil  $\nu_0$  telle que  $W_0 = h\nu_0$ , en deçà de cette fréquence le photon n'a pas assez d'énergie pour extraire l'électron du métal par contre pour  $\nu > \nu_0$ , le surplus d'énergie

$h(\nu - \nu_0)$  est converti en énergie cinétique.

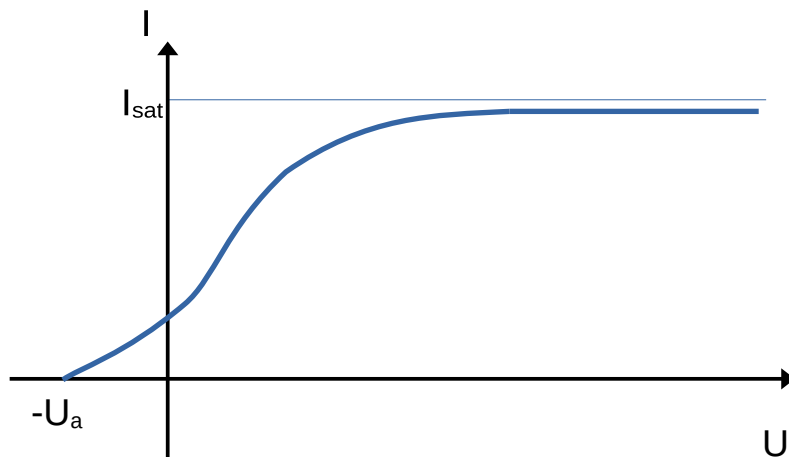
$$h\nu = h\nu_0 + E_{c, cathode, max}$$

Par sa théorie, Einstein renforce l'idée que Planck avait pressentie avec la discontinuité des échanges d'énergie au niveau du rayonnement électromagnétique. Einstein va plus loin que Planck. Il postule que le rayonnement lumineux consiste en un jet de corpuscules d'énergie  $h\nu$  et de vitesse  $c$  (vitesse de la lumière) et lui associe un support : le photon dont l'énergie s'écrit  $h\nu$ .

### b) Observation 2 : $I$ en fonction de la tension $U$ (pour un métal déterminé, $\nu > \nu_0$ , $\Phi$ constant)

Pour  $\nu > \nu_0$ , le photocourant  $I$  croît lorsque  $U$  croît. Si  $U$  atteint une valeur très élevée, le courant  $I$  atteint une valeur maximale et reste constant pour les valeurs de  $U$  beaucoup plus élevées. La valeur maximale du photo-courant est appelée courant de saturation  $I_{sat}$ .

Pour une valeur négative de  $U = -U_a$  le courant  $I$  s'annule.  $U_a$  est le potentiel d'arrêt.



### Interprétation 2

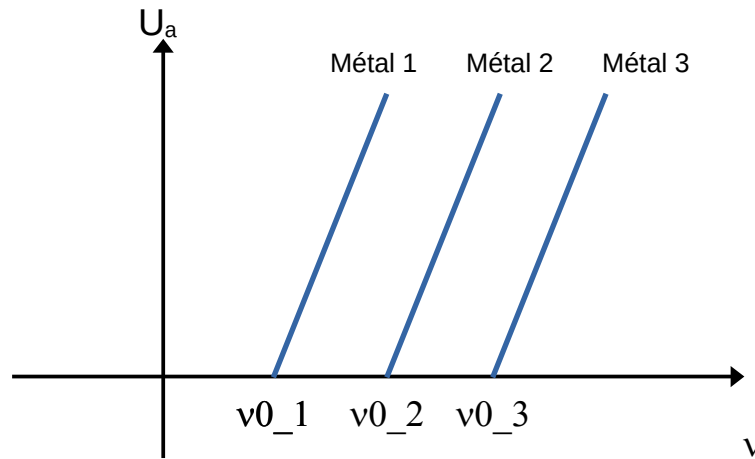
Lorsque  $U$  croît, les électrons sont davantage attirés par l'anode. Ils augmentent leur énergie cinétique.  $I$  croît puisque le nombre d'électrons capables d'atteindre l'anode par unité de temps croît. Finalement, tous les électrons émis peuvent atteindre l'anode. Mais, le nombre d'électrons éjectés de la cathode est limité par le nombre de photons incidents ( $\Phi$  constant), on finit donc par atteindre le courant de saturation  $I_{sat}$ .

Si  $U$  est négatif, les électrons sont, au contraire, repoussés par l'anode. Si  $U$  devient de plus en plus négatif, les derniers électrons atteignant l'anode sont ceux qui étaient émis par la cathode dans la bonne direction avec la vitesse maximale. Le potentiel d'arrêt  $U_a$  correspond à la tension  $U = -U_a$  à appliquer pour contrer

l'énergie cinétique des électrons éjectés de la cathode dans la bonne direction avec la vitesse maximale en les empêchant d'atteindre l'anode.

**c) Observation 3 : courbes de Millikan c'est à dire  $U_a$  en fonction de la fréquence  $\nu$  (pour différents métaux)**

Pour trois métaux différents, on obtient les courbes expérimentales suivantes :



Ces trois demi-droites sont parallèles.

### Interprétation 3

On veut écrire l'équation de  $U_a$  en fonction de  $\nu$  (bien entendu, en supposant  $\nu > \nu_0$ ).

On écrit la conservation de l'énergie pour un électron émis avec une énergie cinétique maximale entre la cathode et l'anode.

$$E_{c,anode,max} - eV_{anode} = E_{c,cathode,max} - eV_{cathode}$$

$$E_{c,anode,max} = E_{c,cathode,max} + eU$$

Pour  $U = -U_a$  la vitesse maximale des électrons arrivant sur l'anode est nulle. L'équation devient :

$$0 = E_{c,cathode,max} - eU_a$$

$$U_a = \frac{1}{e} E_{c,cathode,max}$$

On retrouve, sans surprise, que la mesure de  $U_a$  nous donne l'énergie cinétique maximale à laquelle les électrons sont éjectés de la cathode.

On peut remplacer  $E_{c,cathode,max}$  par son expression en fonction de la fréquence.

$$U_a = \frac{h}{e} (\nu - \nu_0) \quad \text{pour } \nu > \nu_0$$

Les courbes  $U_a = f(\nu)$  sont bel et bien des demi-droites affines de pente  $\frac{h}{e}$ . On obtient donc la valeur de la constante universelle  $h$ .

### d) Observation 4 : Influence du flux lumineux $\Phi$

La puissance du rayonnement  $\Phi$  augmente le nombre de photons. Ce qui augmente le nombre d'électrons éjectés, donc le courant de saturation. L'intensité  $I_{sat}$  du courant de saturation est proportionnelle à la puissance  $\Phi$  du faisceau lumineux monochromatique incident sur la cathode.

## C. La « carte d'identité » du photon

### 1 Vitesse

C'est celle de la lumière donc dans le vide :

$$\boxed{\text{vitesse} = c}$$

### 2 Masse

Pour un corpuscule ayant la vitesse de la lumière, la masse ne peut être que nulle

$$\boxed{\text{masse } m = 0}$$

### 3 Énergie

$$\boxed{E = \hbar \omega} \quad (\text{relation de Planck-Einstein})$$

avec  $\omega = 2\pi\nu$

et pour le photon  $\nu = \frac{c}{\lambda}$

$$\boxed{E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}}$$

### 4 Impulsion ou quantité de mouvement

En relativité restreinte, on démontre que la relation entre l'énergie  $E$ , l'impulsion  $p$  et la masse  $m$  d'une particule s'écrit :  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ . Donc pour le photon :

$$p = \frac{E}{c}$$

$$\boxed{p = h \frac{\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}}$$

*Remarque :*

On pourrait évoquer aussi :

la charge du photon ( $q=0$ )

le spin du photon (hors programme en prépa)

### 5 Conclusion

Lorsque les conditions expérimentales imposent pour la lumière d'avoir recours à la théorie quantique, on passe d'une situation classique ( $\text{action} \gg \hbar$ ) à une situation quantique ( $\text{action} \sim \hbar$ ). Les concepts, même si on continue à leur attribuer le même nom par commodité, doivent céder la place à de nouveaux concepts quantiques. La formule quantique donnant l'énergie  $E = \hbar \omega$  n'a ainsi rien à voir avec la formule classique donnant l'énergie d'une bille !

**Exercice**

La lumière peut être décrite comme une onde.

La lumière peut être décrite comme des corpuscules.

On adopte ici cette deuxième approche pour étudier la pression de radiation.

Un faisceau de lumière parallèle arrive normalement (dans le vide), selon l'axe  $x$ , sur un métal parfait. Toute l'énergie lumineuse est alors réfléchi.

1) On considère le choc d'un seul photon qui revient sur lui même ;

Quelle est l'impulsion subie par le métal ?

2) On désigne par  $n$  la densité volumique de photon incident

Déterminer l'expression de la pression de radiation subie par le métal en fonction de  $n, h, v$

3) Montrer que le résultat s'écrit en fonction de la densité volumique d'énergie lumineuse  $u$  du faisceau incident

4) On utilise ici la description ondulatoire de la lumière.

On décrit le faisceau comme une onde électromagnétique plane monochromatique.

On démontre en électromagnétisme que la densité volumique d'énergie (dans le vide) vaut :

$$u_{EM} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad \text{avec} \quad B = \frac{E}{c} .$$

De plus, pour une onde monochromatique  $E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx)$  .

On a aussi  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$  .

En travaillant en valeurs moyennes, donner l'expression de la pression de radiation en fonction  $\varepsilon_0, E_0$  .

**Réponses**

1)

La quantité de mouvement d'un photon incident vaut  $\vec{p}_{incident} = \frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$  .

La quantité de mouvement du photon réfléchi vaut  $\vec{p}_{réfléchi} = -\frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$  .

La variation de quantité de mouvement d'un photon au cours du choc est donc :

$$\Delta \vec{p}_{un\ photon} = \vec{p}_{réfléchi} - \vec{p}_{incident}$$

$$\Delta \vec{p}_{un\ photon} = -2 \frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$$

2)

En vertu de la conservation de la quantité de mouvement, on peut écrire que:

la variation de quantité de mouvement de la paroi métallique est donc :

$$\Delta \vec{p}_{paroi\ pour\ un\ choc} = 2 \frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$$

Le nombre de photons frappant la surface  $\Delta S$  pendant la durée  $\Delta t$  est l'ensemble des photons contenus dans le volume  $\Delta S c \Delta t$  . En tenant compte de la densité volumique  $n$  de photon incident on trouve :

$$\Delta \vec{p}_{paroi\ de\ surface\ \Delta S\ pendant\ \Delta t} = 2 \frac{h\nu}{c} \vec{u}_x \Delta S c \Delta t n$$

La force pressante subie pas la paroi est :

$$\Delta \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

$$\Delta \vec{F} = 2 h \nu \vec{u}_x \Delta S n$$

ce qui correspond à la pression :

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

$$\boxed{P = 2h\nu n}$$

3)

$$\boxed{P = 2u}$$

4)

$$u_{EM}(x, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(x, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(x, t)}{\mu_0}$$

$$u_{EM}(x, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(x, t) + \frac{1}{2} \frac{E^2(x, t)}{c^2 \mu_0}$$

$$u_{EM}(x, t) = \epsilon_0 E^2(x, t)$$

$E$  varie très rapidement dans l'espace et dans le temps. On travaille alors en valeurs moyennes.

$$\langle u_{EM} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle$$

$$\langle u_{EM} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

La pression de radiation vaut donc :

$$P = 2 \langle u_{EM} \rangle$$

$$\boxed{P = \epsilon_0 E_0^2}$$

## II. L'aspect ondulatoire des particules de matière

### A. Préliminaire historique

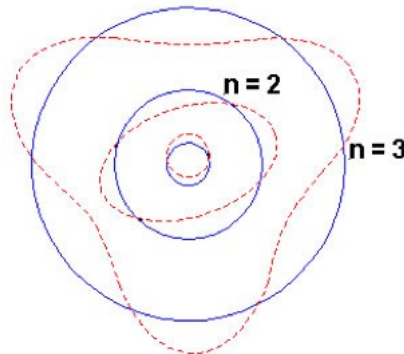
En 1923, le physicien français Louis de Broglie, s'inspirant du travail de Planck et Einstein montrant que les ondes lumineuses peuvent se conduire comme des corpuscules, formule l'hypothèse suivante : les particules matérielles peuvent réciproquement posséder des propriétés ondulatoires. De Broglie a l'intuition profonde de la symétrie dans la nature et émet l'idée qu'il existe entre la longueur d'onde d'une particule de la matière et sa quantité de mouvement la même relation que pour un photon, soit l'équation  $p = h/\lambda$ . Dans le cas d'une particule non relativiste on a  $p = mv$ , la longueur d'onde de de Broglie est alors inversement proportionnelle à la masse  $m$  et à la vitesse  $v$  :  $\lambda_{dB} = h/mv$ .

Cette hypothèse lui permet notamment d'expliquer la théorie de l'atome d'hydrogène de Bohr. De Broglie suggère que chaque orbite électronique dans l'atome est une onde stationnaire. Si on admet que les électrons sur leur orbite sont décrits comme des ondes, il faut que l'onde reboucle sur elle-même, sinon du fait d'interférences destructives, l'onde finira par disparaître. En conclusion, dans le modèle de de Broglie, l'électron est décrit par une onde stationnaire stable telle que :

$$L_n = n \lambda_{dB,n}$$

$$2\pi r_n = n \frac{h}{mv_n}$$

c.a.d. la longueur totale  $L_n$  de l'orbite est égale à un nombre entier de longueurs d'onde de l'onde de de Broglie. L'onde broglienne se referme sur elle-même après avoir fait un tour complet autour du noyau.



De Broglie retrouve ce qu'avait postulé Bohr :  $mv_n r_n = n\hbar$ . En pratique, le modèle fonctionne pour un atome ayant un électron, c'est-à-dire le cas de l'hydrogène, mais il est déficient pour un cas plus compliqué. Vers 1925, Bohr, lui-même, abandonne sa représentation imagée de l'atome. Il faut imaginer une théorie totalement nouvelle, la mécanique quantique.

Louis de Broglie a généralisé le double aspect corpusculaire et ondulatoire à toute particule. A toute particule, de quantité de mouvement  $\vec{p}$  et d'énergie  $E$ , on doit associer une onde monochromatique plane de vecteur d'onde  $\vec{k}$  (avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda_{dB}}$ ) et de pulsation  $\omega$  tels que :

$$\boxed{\vec{p} = \hbar \vec{k}} \text{ et}$$

$$\boxed{E = \hbar \omega}$$

De Broglie devient lauréat du prix Nobel de physique de 1929 pour cette généralisation qui a révolutionné la physique.

**Exercice**

On considère des électrons lents d'énergie  $100 \text{ eV}$  .

Déterminer leur longueur d'onde de matière  $\lambda_{dB}$  associée

- en les considérant comme des particules relativistes  $\lambda_{dB,rel}$

- en les considérant comme des particules non relativistes  $\lambda_{dB,classique}$

Conclusion ?

On donne pour l'électron ::

$$E_0 = mc^2 = 510,999 \text{ keV}$$

$$h = 6,626070 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

$$\lambda_C = \frac{hc}{E_0} = 2.4263102389 \times 10^{-12} \text{ m (longueur d'onde Compton)}$$

**Réponses**

Attention :  $100 \text{ eV}$  désigne l'énergie cinétique  $K$

On a :

$$E_{totale}^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$(K + E_0)^2 = p^2 c^2 + E_0^2$$

$$K(2E_0 + K) = p^2 c^2$$

donc :

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{K(2E_0 + K)}$$

et :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{K(2E_0 + K)}}$$

**Remarque**

Plus les électrons sont rapides, plus la longueur d'onde associée est petite.

Finalement :

$$\lambda_{dB,rel} = \frac{\lambda_C}{\sqrt{\frac{K}{E_0} \left(2 + \frac{K}{E_0}\right)}}$$

Pour la particule supposée non relativiste  $\frac{K}{E_0} \ll 1$

$$\lambda_{dB,classique} = \frac{\lambda_C}{\sqrt{\frac{2K}{E_0}}}$$

ou aussi :

$$\lambda_{dB,classique} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{h}{mv}$$

On remarque donc que :

$$\lambda_{dB,rel} = \frac{\lambda_{dB,classique}}{\sqrt{\left(1 + \frac{K}{2E_0}\right)}}$$

A.N .

$$\lambda_{dB,classique} = \frac{\lambda_C}{\sqrt{\frac{2K}{E_0}}}$$

avec

$$\frac{K}{E_0} = \frac{100}{510,999 \times 10^3}$$

$$\frac{K}{E_0} = 0,1956951 \times 10^{-3}$$

$$\lambda_{dB,classique} = \frac{\lambda_C}{\sqrt{\frac{2K}{E_0}}}$$

$$\lambda_{dB,classique} = \frac{2,426310 \times 10^{-12}}{\sqrt{2 \times 0,1956951 \times 10^{-3}}}$$

$$\boxed{\lambda_{dB,classique} = 0,122643 \text{ nm}}$$

Si on tient compte de la correction relativiste :

$$\lambda_{dB,rel} = \frac{\lambda_{dB,classique}}{\sqrt{\left(1 + \frac{K}{2E_0}\right)}}$$

puisque  $\frac{K}{E_0} \approx 0,196 \times 10^{-3} \ll 1$  , on peut écrire

$$\lambda_{dB,rel} = \lambda_{dB,classique} \left(1 - \frac{K}{4E_0}\right)$$

$$\lambda_{dB,rel} = 0,122643 \left(1 - \frac{0,196 \times 10^{-3}}{4}\right)$$

$$\boxed{\lambda_{dB,rel} = 0,122637 \text{ nm}}$$

L'erreur relative commise avec le calcul non relativiste vaut 0,0196 %

Pour  $K = 100 \text{ eV}$  , on a affaire à des électrons lents. La formule classique  $\lambda_{dB} = \lambda_{dB,classique} = \frac{h}{\sqrt{2mK}}$

convient parfaitement.

## B. La diffraction d'électrons lents

L'hypothèse de de Broglie trouva rapidement une vérification expérimentale par Davisson et Germer. Il s'agit d'une expérience de diffraction.

Remarque

Dans une expérience d'optique, pour mettre en évidence les propriétés ondulatoires de la lumière, il faut que les dimensions des instruments utilisés (largeur de fentes, pas du réseau,...) soient comparables à la longueur d'onde ( de  $\lambda$  à  $100\lambda$  ).

Ici, dans le cas des électrons, pour une énergie raisonnable de l'ordre de  $100\text{ eV}$  correspondant à une vitesse de l'ordre de  $5.10^6\text{ m/s}$ , la longueur d'onde de de Broglie associée à l'électron est de l'ordre de  $1\text{ \AA}$  ( $10^{-10}\text{ m}$ ). Il est donc impossible de confectionner un réseau de diffraction ayant ce pas ou une fente ayant cette largeur.

Davisson et Germer détournèrent cette difficulté en utilisant un réseau naturel : le cristal.

L'objectif initial de Davisson et Germer était d'étudier la diffusion des électrons par une cible de nickel ordinaire. En raison de la petite taille des électrons, ils s'attendaient à ce que cela leur permette d'obtenir une image détaillée de la surface et de la structure de réseau de nickel.

Un accident fortuit de laboratoire les conduit à devoir décaper la cible (chauffage en présence d'hydrogène puis dans le vide, dégazage, décapage par évaporation...). Reprenant leur expérience, ils constatent que le diagramme de diffusion est totalement modifié.

Cette modification marquée du diagramme de diffusion est à attribuer à une recristallisation de la cible survenue lors du chauffage prolongé. Avant l'accident lors des expériences précédentes, ils bombardaient de nombreux petits cristaux alors qu'après l'accident, la cible est constituée de quelques monocristaux.

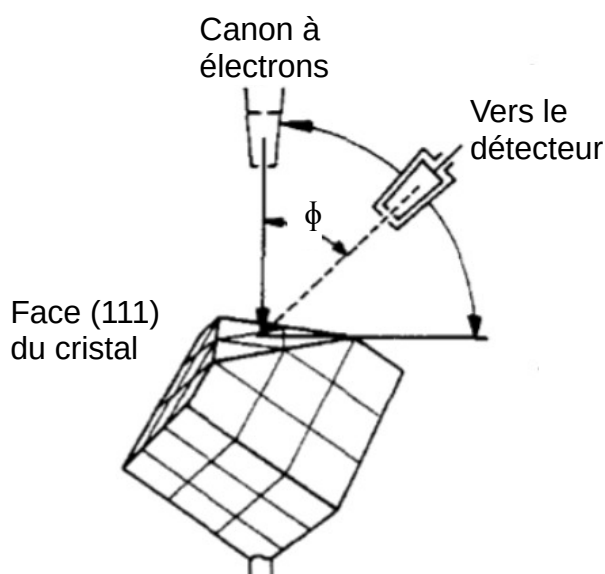
Davisson et Germer émettent alors l'hypothèse que les maximums observés peuvent être des pics de diffraction à attribuer à l'onde de matière des électrons. Ils partent de l'idée qu'un flux d'électrons de vitesse  $v$  est en quelque sorte équivalent à un faisceau de rayonnement de longueur d'onde  $h/mv$  et veulent montrer dans quelle mesure les observations peuvent être expliquées par cette hypothèse.

#### Remarque

Lorsque la cible en nickel a une forme polycristalline avec de nombreux cristaux microscopiques orientés de manière aléatoire, les électrons incidents se diffusent de sa surface dans diverses directions aléatoires. Par conséquent, l'intensité du faisceau d'électrons diffusé est sensiblement la même dans toutes les directions, ressemblant à une réflexion diffuse de la lumière provenant d'une surface poreuse.

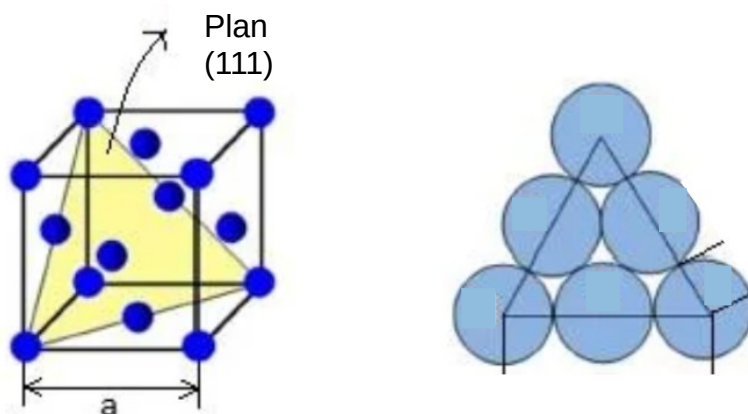
Cependant, lorsque la cible de nickel a une structure cristalline régulière, l'intensité du faisceau d'électrons diffusé montre un maximum clair à un angle spécifique et les résultats montrent un diagramme de diffraction clair

## 1 Le matériel

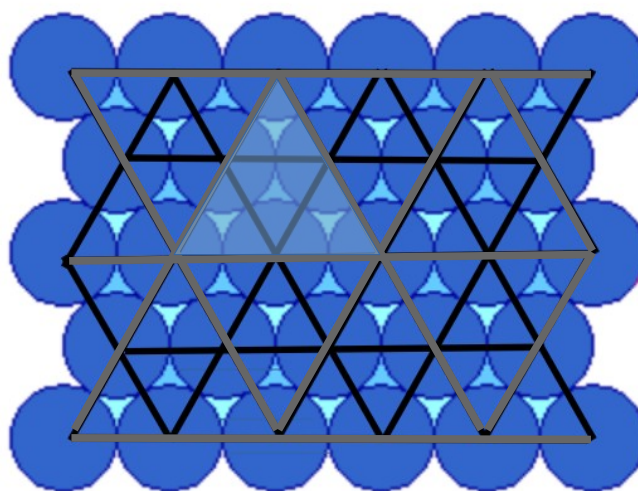


L'appareil expérimental de base de Davisson consistait en une enveloppe de verre scellée sous vide élevé contenant un canon à électrons lents utilisant une tension électrique ajustable d'énergie de l'ordre de 50 eV dirigé vers une face (111) (plan de plus haute densité atomique) de nickel monocristallin. Un détecteur mobile pouvait être déplacé sur un arc de cercle autour du cristal. Il était possible d'étudier la dépendance angulaire du faisceau diffracté.

La cible est un bloc de nickel de 8 x 3 mm découpé dans une barre dans laquelle la croissance cristalline a été induite par recuit. Une incision a été pratiquée approximativement parallèle à un ensemble de plans (111). Cette face qui devient finalement la face de la cible a été polie et corrigée.



*Plan (111) dans une maille cubique faces centrées*



*Plan de surface (111)*

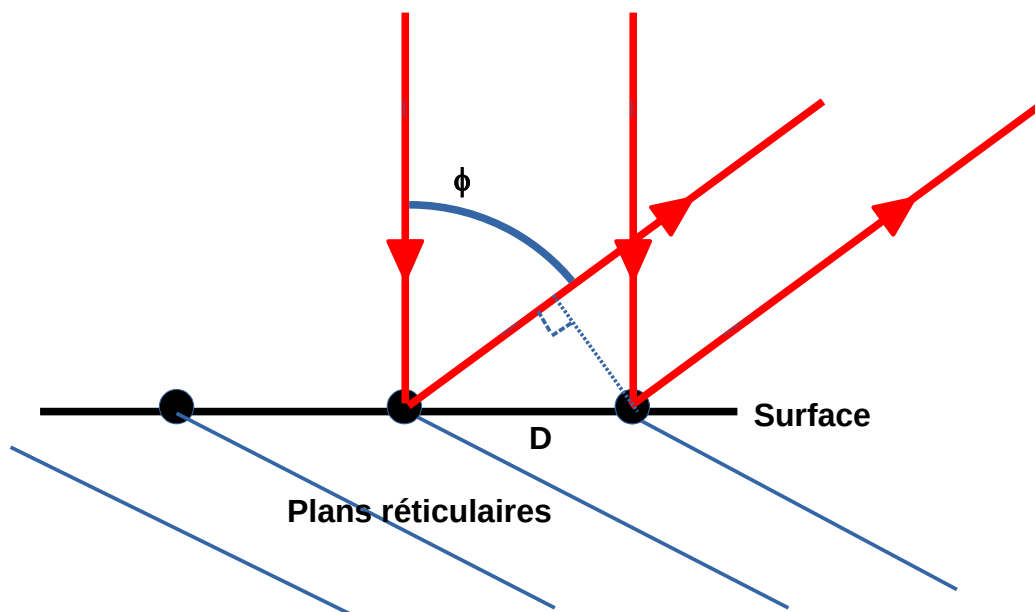
## 2 Interprétation : analogie avec des réseaux optiques

La profondeur de pénétration des électrons lents dans le cristal est très courte de l'ordre de quelques distances atomiques.

Les électrons-ondes sont diffusés élastiquement par les atomes en surface (phénomène de diffraction).

Pour électrons-ondes qui pénètrent dans le métal, il y a diffusion par les électrons des atomes internes du cristal cible. Ces interactions sont inélastiques avec un transfert d'énergie important. Ces électrons-ondes ne contribuent pas à l'interférence.

Ainsi, les électrons sont diffusés par une monocouche de Ni. Le phénomène de diffraction met en jeu les atomes de la surface analysée.



*On suppose ici que l'extinction des ondes dans le métal est suffisamment importante pour que la diffusion de la première couche soit prédominante.*

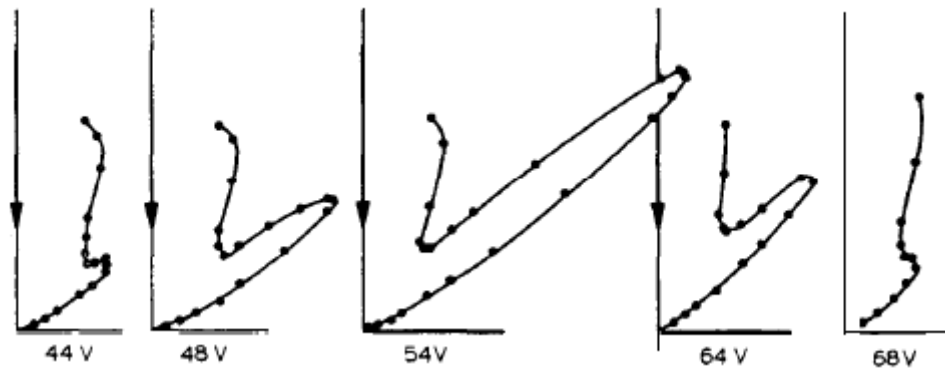
*On a représenté sur la figure des plans réticulaires. La diffraction par réflexion sur les plans réticulaires d'atomes de nickel est ici supposée négligeable.*

Dans le plan de la surface du cristal, les atomes peuvent être regroupés en rangées de lignes parallèles équidistantes. On peut supposer que chaque ensemble de lignes se comporte vis à vis des électrons incidents comme un réseau analogue aux réseaux optiques plans de diffraction par réflexion obtenus en gravant sur une plaque de verre une série de traits parallèles équidistants. Les faisceaux de diffraction dus à chaque réseau se produisent dans le plan normal à ses lignes et satisfont à la formule du réseau plan. Chaque atome diffracte les électrons incidents et l'on observe un pic d'intensité dans les directions où les différentes ondes de matière diffractées interfèrent constructivement.

### 3 Les paramètres

Le courant  $I$  recueilli par le galvanomètre (collecteur de courant) dépend du pas  $D$  du réseau, de la longueur d'onde associée aux électrons  $\lambda_{dB}$  (celle-ci est fonction de la tension accélératrice  $U$ ), et de l'angle  $\phi$ . Donc  $I = I(D, U, \phi)$ .

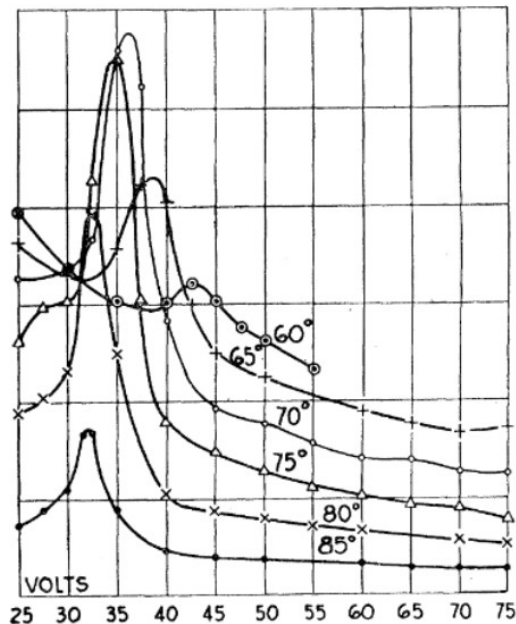
Lorsque l'énergie des électrons est fixe (tension accélératrice des électrons  $U$  fixée), on observe un maximum de diffraction (maximum pour le courant collecteur  $I$ ) sous un certain angle  $\phi$ .



Les courbes montrent la distribution angulaire de l'intensité. Chaque courbe correspond à une tension accélératrice  $U$  fixée.

[C.Davisson, L.H. Germer, Phys. Rev. (1927)]

Lorsque l'angle d'observation  $\phi$  est fixé, on observe un maximum de diffraction (maximum pour le courant collecteur  $I$ ) pour une certaine énergie des électrons incidents (tension accélératrice des électrons  $U$ ).



Les courbes montrent la variation de l'intensité en fonction de la tension accélératrice. Chaque courbe correspond à une position du collecteur  $\phi$  fixée.

[C.Davisson, L.H. Germer, Phys. Rev. (1927)]

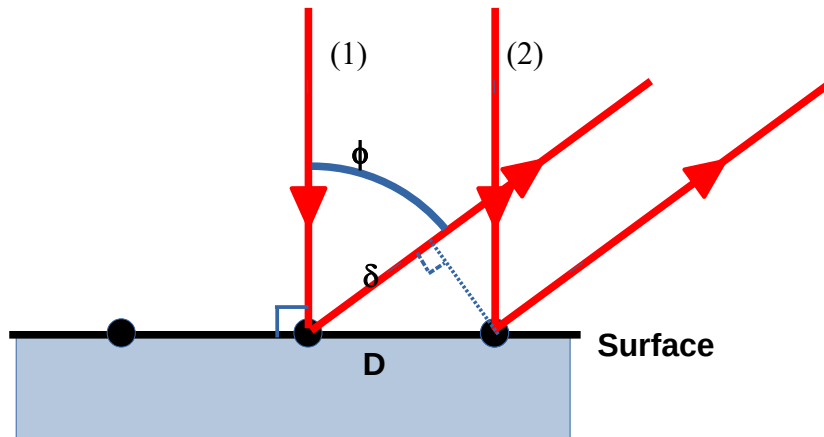
#### 4 Conclusion

L'expérience de Davisson et Germer a permis de vérifier quantitativement la validité de la relation de de Broglie.

Davisson et Germer établissent en 1927, l'existence des ondes de Louis de Broglie associées aux électrons que l'on tenait jusque là pour être des corpuscules, prouvant ainsi que l'onde associée à un corpuscule n'est pas fictive, mais bien réelle.

**Exercice 1**

Dans l'expérience de Davisson et Germer les électrons-ondes sont diffractés par les rangées équidistantes des atomes de nickel situés sur la surface. Cette diffraction est analogue à la diffraction due à un réseau par réflexion. La distance séparant deux rangées est notée  $D$  (pas du réseau). On désigne par  $\phi$  l'angle entre le faisceau incident, normal à la surface du cristal, et le faisceau diffracté. La longueur d'onde associée aux électrons lents est notée  $\lambda_{dB}$ . L'interférence entre les rayons diffractés a lieu à l'infini.



- 1) Déterminer la différence de marche  $\delta$  entre (1) et (2).
- 2) À quelle condition obtient-on, à l'infini, un pic de diffraction ?

Réponses

1)

Lors de la diffraction de surface des électrons-ondes sur une structure en réseau cristallin, les faisceaux incidents en phase sont réfléchis par les atomes présents à la surface. Un rayon réfléchi par l'atome gauche parcourt une distance supplémentaire :

$$\delta = D \sin(\phi)$$

2)

Les faisceaux diffractés restent en phase lorsque  $\delta$  est un multiple entier de leur longueur d'onde  $\lambda_{dB}$ . L'intensité des ondes diffractées a des maxima à l'infini pour les angles  $\phi$  satisfaisant  $\delta = n \lambda_{dB}$  soit pour :

$$D \sin(\phi) = n \lambda_{dB}$$

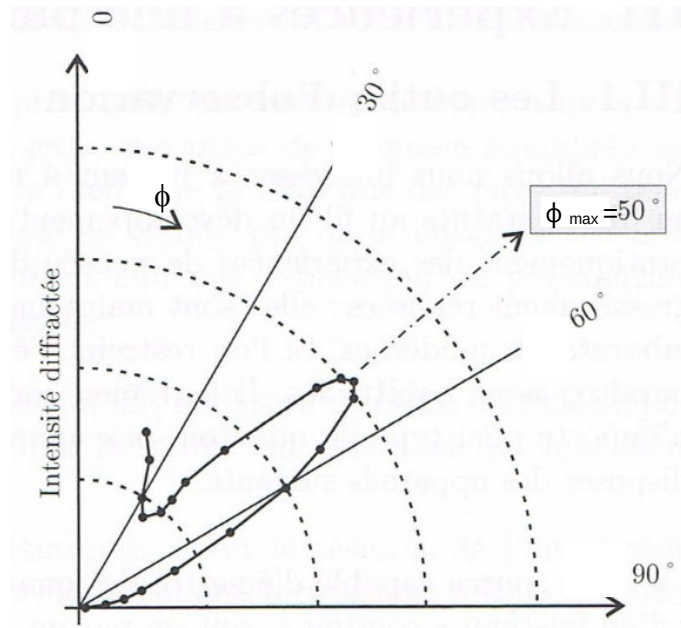
$n$  désigne un entier

**Exercice 2**

L'énergie cinétique des électrons utilisés dans une expérience de Davisson et Germer est

$$K = 54 \text{ eV}$$

- 1) Calculer la vitesse des électrons.
- 2) Calculer la longueur-d'onde associée aux électrons.
- 3) Calculer la distance interatomique  $D$  à la surface du cristal sachant que le pic représenté est le seul pic observé d'ordre non nul.



Réponses

1)

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

en supposant que la vitesse ne soit pas relativiste.

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

A.N.

$$v = \sqrt{\frac{2 \times (54 \times 1,602 \times 10^{-19})}{9,1 \times 10^{-31}}}$$

$$v = 4,36 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$$

soit 1,5 % de la vitesse de la lumière.

On néglige la correction relativiste.

2)

$$\lambda_{dB} = \lambda_{dB, classique} = \frac{h}{mv}$$

A.N.

$$\lambda_{dB} = \frac{(6,63 \times 10^{-34})}{(9,1 \times 10^{-31}) \times (4,36 \times 10^6)}$$

$$\lambda_{dB} = 167 \text{ pm}$$

3)

$$D = \frac{\lambda}{\sin \phi}$$

A.N.

$$D = \frac{(167 \times 10^{-12})}{\sin(50)}$$

$$D = 218 \text{ pm}$$

**Exercice 3**

Dans l'une des expériences de Davisson et Germer, pour différentes positions du galvanomètre ( $\phi$  fixé) on mesure les variations de  $I$  en fonction de la tension accélératrice  $U$  (voir figure pages précédentes). De chaque courbe, Davisson et Germer extraient la valeur de  $U$  pour le pic de diffraction.

On donne le tableau :

$\phi$ (degrès)	$U$ (volts)
85	32,0
80	33,0
75	35,0
70	36,0
65	38,5
60	42,5

A.N.

$$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

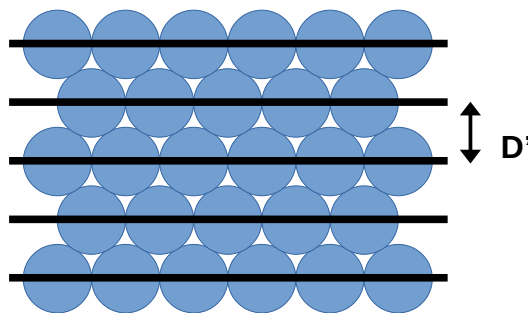
$$m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

1) Montrer qu'il suffit de montrer, pour les lignes de ce tableau, la constance de  $\sqrt{U} \sin \phi$  pour vérifier l'hypothèse de de Broglie.

2) Proposer une valeur numérique pour  $\sqrt{U} \sin \phi$

3) En déduire la valeur du paramètre  $D$

4) Le paramètre cristallin de la maille de nickel est  $a = 0,352 \text{ nm}$ . Calculer la valeur du paramètre  $D'$  pour le réseau de lignes représenté ci-dessous. Conclure.



Réponses

1)

$$\text{Les maxima sont donnés par : } D \sin(\phi) = n \lambda_{dB}$$

Ici, on a un seul maximum pour chaque courbe donc  $n = 1$ .

$$\text{On a aussi } \lambda_{dB} = \lambda_{dB, classique} = \frac{h}{mv} \text{ et}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = e U$$

finalement si l'hypothèse de de Broglie est exacte, on doit vérifier:

$$D \sin(\phi) = \lambda_{dB}$$

$$D \sin(\phi) = \frac{h}{m v}$$

$$D \sin(\phi) = \frac{h}{m} \sqrt{\frac{m}{2eU}}$$

$$D \sin(\phi) = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

$$\sqrt{U} \sin(\phi) = \frac{h}{D\sqrt{2me}} = \text{constante}$$

A.N.

$$\sqrt{U} \sin(\phi) = \frac{(6,63 \times 10^{-34})}{D\sqrt{2 \times (9,1 \times 10^{-31}) \times (1,602 \times 10^{-19})}}$$

$$\sqrt{U} \sin(\phi) = \frac{1,23 \times 10^{-9}}{D}$$

2)

Pour chaque valeur du tableau, on calcule  $\sqrt{U} \sin \phi$ 

$\phi$ (degré)	$U$ (volts)	$\sqrt{U} \sin \phi$
85	32,0	5,64
80	33,0	5,66
75	35,0	5,71
70	36,0	5,64
65	38,5	5,62
60	42,5	5,65

On peut estimer que l'expérience vérifie l'hypothèse de de Broglie.

On adopte la valeur moyenne :

$$\sqrt{U} \sin(\phi) = 5,65$$

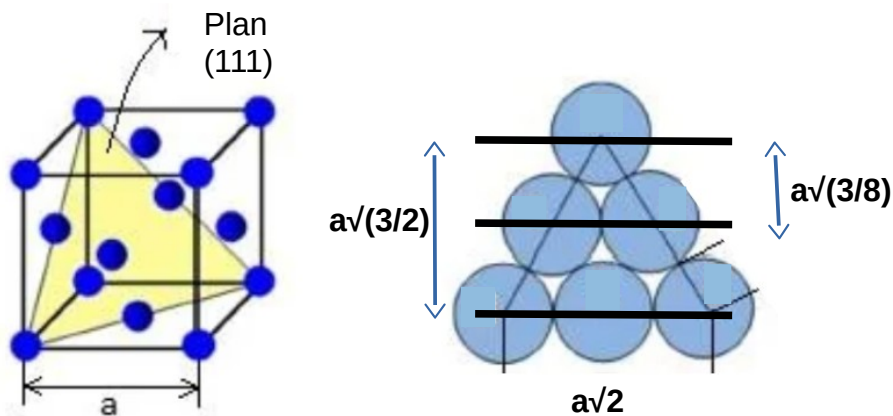
3)

On peut en déduire la valeur expérimentale de  $D$ 

$$\frac{1,23 \times 10^{-9}}{D} = 5,65$$

$$D = 218 \text{ pm}$$

4)



On a pour le réseau proposé :

$$D' = a\sqrt{3/8}$$

A.N.

$$D' = a\sqrt{3/8}$$

$$D' = (352 \times 10^{-12}) \times \sqrt{3/8}$$

$$D' = 216 \text{ pm}$$

Le réseau envisagé semble un réseau possible pour expliquer la diffraction observée.

## III. Quantons

### A. Vocabulaire

Dans la physique préquantique (classique) caractérisée par une action supérieure  $A \gg \hbar$ , tout système physique se comprend soit à partir de la notion de particule, soit à partir de la notion d'onde. En physique quantique caractérisée par une action  $A \approx \hbar$ , ces deux notions perdent leur valeur d'explication. Un objet quantique n'est ni une onde, ni un corpuscule. Il n'existe plus qu'une seule sorte d'objet quantique. Pour des valeurs de l'action caractéristique  $A \gg \hbar$ , ces objets peuvent être alors approximativement décrits soit comme des particules, soit comme des ondes. La vraie question: comment se fait-il que les objets quantiques apparaissent à l'approximation classique soit comme des ondes, soit comme des particules ?

Mario Bunge, physicien et philosophe, introduit le concept de « quanton » à partir de 1967. Pour lui, le quanton est la dénomination de tout « microsystème », c'est-à-dire de tout système obéissant aux lois de la physique quantique. La physique quantique doit être pensée en ses propres termes, et elle porte sur un nouveau type d'objet inconnu des théories classiques qu'il désigne sous le terme : quanton. Le principal intérêt de cette approche est de remplacer l'usage de deux concepts incompatibles (onde et corpuscule) par l'usage d'un concept unique remplissant de manière cohérente le rôle des deux précédents.

Dans le domaine quantique, les concepts classiques cèdent alors la place à de nouveaux concepts proprement quantiques.

1) L'énergie-pulsation quantique ;

Pour l'onde lumineuse de pulsation connue  $\omega$  et de vecteur d'onde connu  $\vec{k}$ , on associe des corpuscules ou photons d'énergie  $E$  donnée par la relation de Planck-Einstein et de quantité de mouvement  $\vec{p}$ .

Concept classique corpusculaire	Concept classique ondulatoire	Relation de Planck-Einstein	
$E$	$\omega$	$E = \hbar \omega$	avec $\omega = 2\pi\nu$ donc $E = h\nu$

Ce concept quantique est directement associé aux propriétés d'invariance par translation dans le temps. ( En mécanique classique, l'énergie se conserve dans le temps lors du mouvement. En mécanique classique, une onde harmonique subit un simple déphasage lors d'une translation dans le temps).

A la limite classique, ce concept quantique peut-être identifié avec l'un des deux concepts classique : énergie ou pulsation.

De plus pour le photon, on a :

$$E = \hbar \omega = pc \quad \text{d'où}$$

$$p = \hbar \frac{\omega}{c}$$

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$$

2) La quantité de mouvement-vecteur d'onde quantique ;

Pour une particule matérielle de quantité de mouvement  $\vec{p}$  connue et d'énergie  $E$  connue, on associe une onde de vecteur d'onde  $\vec{k}_{dB}$  donné par la relation de de Broglie et de pulsation  $\omega_{dB}$ .

Concept classique corpusculaire	Concept classique ondulatoire	Relation de de Broglie	
$\vec{p}$	$\vec{k}$	$\vec{k}_{dB} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$ $\vec{p} = \hbar \vec{k}_{dB}$	avec $k_{dB} = 2\pi/\lambda_{dB}$ donc $\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$

Ce concept quantique est directement associé aux propriétés d'invariance par translation dans l'espace. (La « longueur d'onde de de Broglie »  $\lambda_{dB} = h/p$  caractérise l'harmonicité spatiale du quanton. Remarque : le quanton n'étant pas une onde, il faut donc se méfier de l'appellation plus simple « longueur d'onde »).

De plus, pour l'onde associée à la particule matérielle, on a :

$$\omega_{dB} = E/\hbar = 2\pi\nu_{dB} \text{ d'où}$$

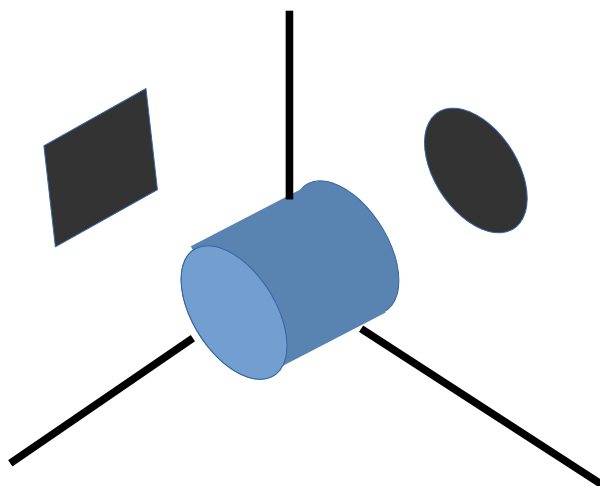
$$\nu_{dB} = E/h$$

*Remarque :*

*Attention : on n'a pas la relation  $\lambda_{dB} = \text{vitesse}/\nu_{dB}$*

## B. L'expression à éviter : « dualité onde-particule »

L'expression « dualité onde-particule » n'apporte rien à la description de l'objet quantique et ne permet pas de rendre compte des subtilités de comportement en quantique. Plus précisément, quelles sont les conditions de validité concrètes de ces deux descriptions approximatives (ondes ou particules) contradictoires? Cette question, non-triviale, reste ouverte. En tout état de cause, la "dualité onde-particule" ne résout en rien. Dans notre vie de tous les jours, il n'y a pas d'objet présentant des caractères ondulatoires et des caractères corpusculaires en même temps.



Un exemple différent: si l'ombre d'un cylindre est projetée selon son axe principal, elle sera ronde. Si son ombre est projetée de côté, elle aura l'air carré. On ne dira pas que l'objet est une dualité carré-cercle. Ce n'est ni un cercle 2D, ni un carré 2D. Il faut le décrire en 3D. C'est un autre objet : un cylindre.

Il vaut mieux éviter de parler à propos de l'objet quantique de dualité onde-particule. C'est un nouvel objet : un quanton.

**Bibliographie :**

**J.-M. Lévy-Leblond et F. Balibar, Quantique : rudiments, Paris : InterÉditions (Centre national de la recherche scientifique), 1984.**

# Chap 2 : Introduction au formalisme quantique

## I. Fonction d'onde

### A. Expériences d'interférence

L'intuition et le bon sens hérités de la physique classique sont inadaptés dans le monde quantique du fait de la nature fondamentalement probabiliste ou indéterministe des phénomènes quantiques.

#### 1 Avec la lumière : trous ou fentes de Young

##### a) Rappels qualitatifs obtenus en optique ondulatoire

On considère l'expérience des fentes d'Young.

On désigne par  $E_1(x)$  l'amplitude complexe de l'onde lumineuse qui passe par la fente 1

On désigne par  $E_2(x)$  l'amplitude complexe de l'onde lumineuse qui passe par la fente 2

On obtient les résultats expérimentaux suivants.

- fente 2 fermée. L'intensité sur l'écran est donnée par  $I_1(x) = |E_1(x)|^2$ . C'est la figure de diffraction de la lumière à travers la fente 1.

- fente 1 fermée. L'intensité sur l'écran est donnée par  $I_2(x) = |E_2(x)|^2$ . C'est la figure de diffraction de la lumière à travers la fente 2.

- les deux fentes ouvertes.

On sait que le raisonnement simpliste consistant à dire que l'intensité obtenue est la somme des intensités :  $I_1$  (fente 1 ouverte seule) et  $I_2$  (fente 2 ouverte seule) est faux.

On ne doit pas sommer les intensités.

$$I(x) \neq |E_1(x)|^2 + |E_2(x)|^2$$

On doit sommer les amplitudes complexes et non les intensités soit :

$$E(x) = E_1(x) + E_2(x)$$

$$I(x) = |E_1(x) + E_2(x)|^2$$

On retrouve alors les franges d'interférence.

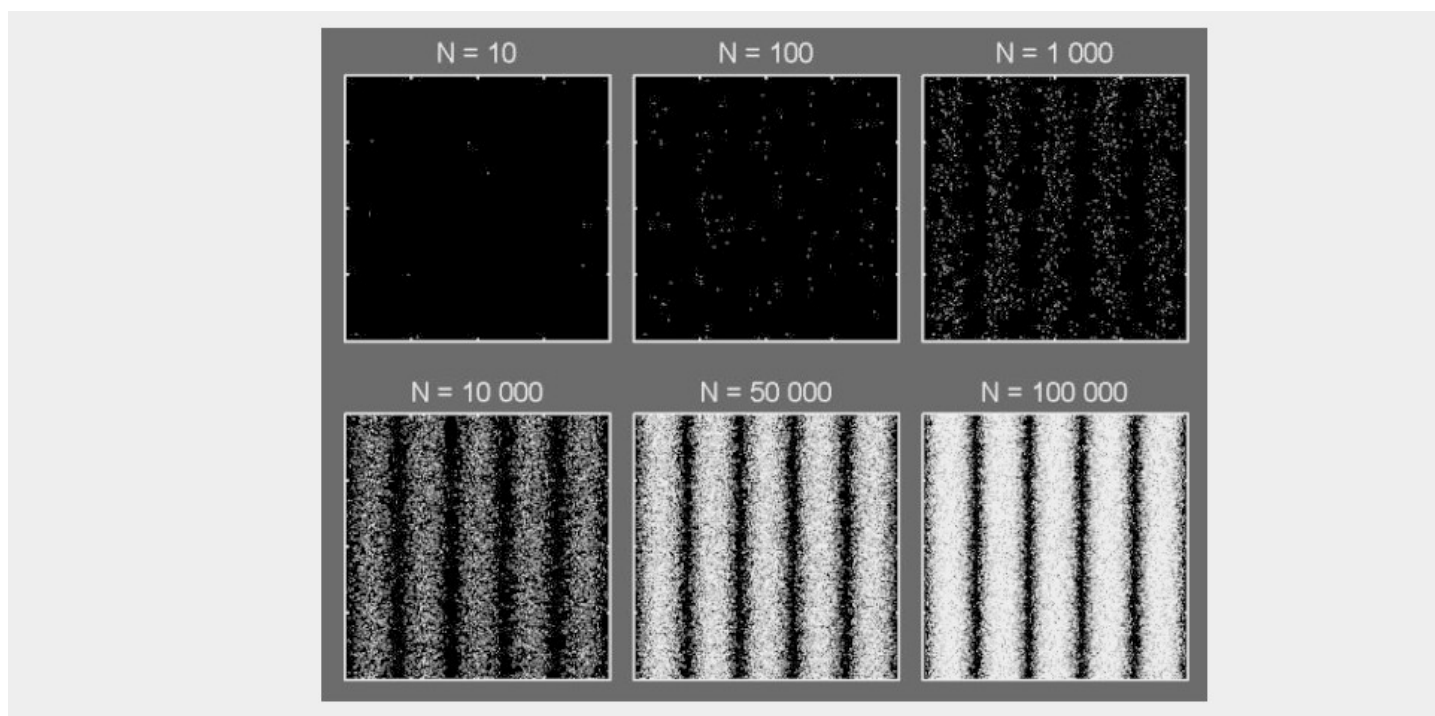
##### b) L'expérience d'interférence à un seul photon

###### ◆ Description de l'expérience

Soit un dispositif spécial dont la source S produit des photons uniques. Son débit en photons est tel que l'on peut considérer que les photons sont émis un par un. Au lieu de l'écran, on dispose par exemple un capteur CCD ultrasensible, qui détectera chaque impact de photon, ainsi que la position de celui-ci. Le photon a deux chemins possibles : soit il passe par la fente 1, soit il passe par la fente 2. Chaque photon est détecté en un point du capteur (voir figure).

Les points de détection sont aléatoires : les différents photons sont détectés en des points différents. (Ce qui est en contradiction avec le déterminisme classique: à des conditions initiales identiques, correspondent des conditions finales identiques).

Au bout d'un temps suffisamment long, on observe que les points de détection des photons forment la figure d'interférence.



Figures d'interférence obtenues avec des photons uniques. Le nombre de photons sur le détecteur augmente au cours du temps. [École Normale Supérieure de Cachan (France, 2005)]

Si on ferme une des deux fentes, seule la diffraction subsiste.

♦ Nécessité d'une interprétation probabiliste

Un photon a de fortes chances d'être détecté au niveau d'une frange brillante, Les points de détection se répartissent au hasard, mais selon une loi de probabilité identique pour chacun, qui fait qu'il y a apparition de zones probables (les raies brillantes) et de zones moins probables (les raies sombres). La figure d'interférences résulte de l'action d'un grand nombre de photons.

*Remarque*

*Dans le cas où seule la fente 1 est ouverte, les photons ont une probabilité plus importante d'être détectés là où  $I_1(x) = |E_1(x)|^2$  est plus important pour que finalement on retrouve la figure de diffraction de la fente 1. La probabilité élémentaire de détecter le photon entre  $x$  et  $x+dx$  vaut  $dP = I_1(x)dx$ .*

## 2 Avec des particules matérielles

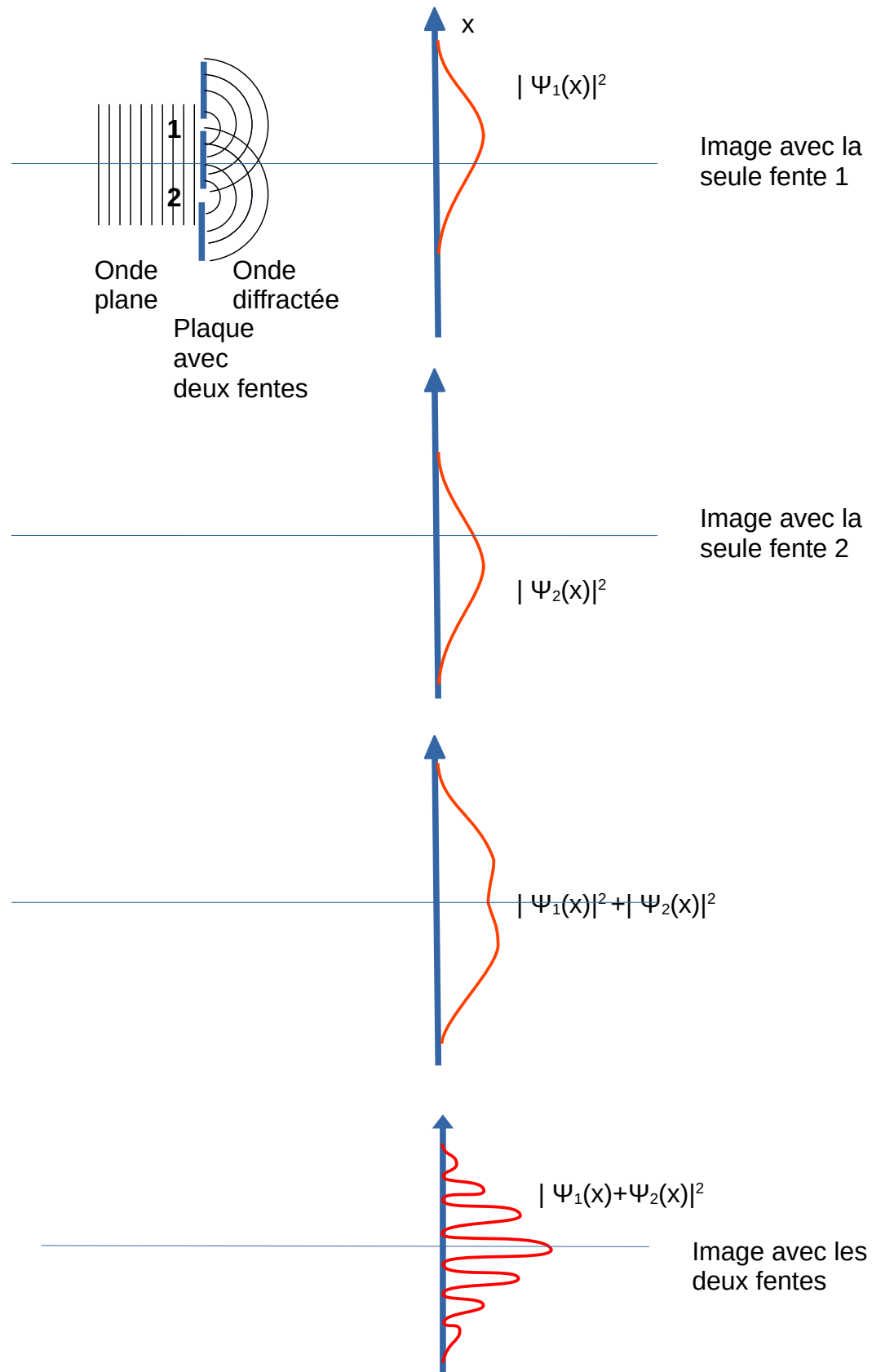
Depuis les années 70, on a pu observer des figures d'interférences avec des quantons aussi divers que électrons, neutrons, atomes et même molécules.

L'expérience avec des électrons est difficile à réaliser exactement de la même manière, car l'appareil devrait être fabriqué à une échelle incroyablement petite. En 1954, Möllenstedt et Düker ont réalisé pour la première fois l'expérience d'interférence avec des électrons en utilisant un biprisme électrostatique.

### a) Résultats

Pour interpréter l'expérience, parfois théorique, des bifentes on a introduit une fonction d'onde complexe  $\Psi(x)$  associée à la particule.

Les résultats analogues à ceux obtenus avec les photons sont schématisés ci-dessous.



*Expérience des bifentes de Young. Si l'une des deux fentes est fermée, on observe l'image de diffraction d'une seule fente. Lorsque les deux fentes sont ouvertes, on observe une image d'interférence des ondes provenant des deux fentes*

*Remarque*

*En quantique, dans l'étude des particules matérielles, on identifiera le module au carré  $|\Psi(x)|^2$  comme étant une densité de probabilité de présence. Il faut ajouter une condition de normalisation qui signifie que la probabilité de trouver la particule sur tout l'axe  $x$  est égale à 1 soit  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$ . On suppose ici dans la suite que l'amplitude de l'onde associée a été normalisée. Elle a été multipliée par un coefficient  $\alpha$  afin de satisfaire une condition de normalisation.*

## b) Commentaires.

### ◆ Superposition d'états

Les résultats expérimentaux s'expliquent en appliquant le principe de superposition aux fonctions d'onde. Le principe de superposition est un des principes les plus importants de la théorie quantique.

Chaque photon interfère avec lui-même comme une onde. Quand on dit que chaque photon interfère avec lui-même, il s'agit en fait d'interférences d'amplitudes de probabilité.

Une particule est dite dans état superposé. Dans l'expérience des deux fentes, une particule est dans une superposition d'états quand elle est considérée comme passant à la fois par la fente 1 et par la fente 2.

Pour chaque photon ou particule, au niveau du détecteur, on aura ;

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1(x) + \Psi_2(x))$$

où  $\Psi_1(x)$  est associée à la probabilité que la particule soit détectée à la position repérée par  $x$  en passant par la fente 1

où  $\Psi_2(x)$  est associée à la probabilité que la particule soit détectée à la position repérée par  $x$  en passant par la fente 2.

(le coefficient  $1/\sqrt{2}$  est présent pour des raisons de normalisation)

### ◆ Densité de probabilité

$|\Psi(x)|^2$  est la densité de probabilité pour la particule d'être détectée en  $x$ .

$|\Psi_1(x)|^2$  est la densité de probabilité pour la particule d'être détectée en  $x$  en passant par la seule fente 1 (fente 2 fermée)

$|\Psi_2(x)|^2$  est la densité de probabilité pour la particule d'être détectée en  $x$  en passant par la seule fente 2 (fente 1 fermée)

Si on somme les modules au carré des deux fonctions d'onde  $|\Psi(x)|^2 = \frac{1}{2}(|\Psi_1(x)|^2 + |\Psi_2(x)|^2)$  on se trouve dans le cas de deux états quantiques discernables. Il n'y a pas d'interférences.

Ici les deux états quantiques sont indiscernables  $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1(x) + \Psi_2(x))$  et donc :

$$|\Psi(x)|^2 = \frac{1}{2}|\Psi_1(x) + \Psi_2(x)|^2$$

On ne doit pas analyser le phénomène d'interférence des particules matérielles uniques en termes de probabilité classique : lorsqu'à la même issue correspondent des processus indépendants différents indiscernables, la probabilité de cette issue n'est pas la somme des probabilités individuelles.

### ◆ Trajectoire de la particule

On ne peut dire quel chemin chaque particule a emprunté, puisque que deux chemins sont possibles. Les interférences apparaissent lorsqu'un objet quantique peut emprunter plusieurs chemins pour arriver au même détecteur, et que ces chemins sont indiscernables après la détection.

Le comportement des particules dépend de toutes les possibilités indiscernables. *Les deux chemins sont indiscernables.* A chaque chemin est associée une amplitude de probabilité  $\Psi_i(x)$ . Chaque particule explore tous les chemins possibles (délocalisation) comme une onde, cependant cette onde est indivisible à la détection. Ce sont les amplitudes de probabilité associées aux deux chemins que peut prendre la particule qui interfèrent.

Une particule n'a pas une trajectoire bien définie. Lorsqu'on cherche à savoir par quel chemin est passée la particule, on n'observe plus de figure d'interférence. On dit alors que il y a une perturbation incontrôlable de l'objet quantique par la mesure. L'interposition d'un instrument de mesure modifie le chemin emprunté et il n'y a plus indiscernabilité pour la particule donc plus d'interférence,

### Remarque

*Les électrons et les photons semblent se comporter de la même façon.*

*Or, selon le formalisme de la quantique, la physique des électrons non-relativistes est décrite par l'équation de Schrödinger alors que la physique des photons - ces derniers étant toujours relativistes - ne peut être décrite que par la théorie quantique des champs, ce qui est encore plus compliqué.*

*Dans la suite, on s'intéresse davantage aux particules de matière.*

## 3 Définitions

### a) Définitions générales

On associe à un quanton une fonction d'onde  $\Psi(\vec{r}, t)$  complexe contenant toutes les informations sur l'onde associée à un quanton.  $\Psi(\vec{r}, t)$  est l'amplitude de probabilité .

La quantité  $\rho(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$  est la densité de probabilité de localisation du quanton au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$ .

La probabilité élémentaire de trouver le quanton dans un volume élémentaire  $d^3r = d\tau$  autour de  $\vec{r}$  en  $t$  est égale à  $dP = \rho(\vec{r}, t) d\zeta = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\tau$

La fonction  $\rho(\vec{r}, t)$  est astreinte à une condition de normalisation :

$$\iiint |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\tau = 1$$

tout l'espace

### b) Cas plus simple

Le programme étudie surtout le cas unidirectionnel. De plus, le temps n'intervient pas.

La fonction d'onde s'écrit :  $\Psi = \Psi(x)$  .

La densité de probabilité de localisation du quanton en  $x$  est  $\rho(x) = |\Psi(x)|^2$

La probabilité de trouver la quanton entre  $x$  et  $x+dx$  vaut  $dP = |\Psi(x)|^2 dx$  .

La condition dite de normalisation signifie que la probabilité de trouver la particule sur l'axe  $x$  est égale à 1. Elle s'écrit :  $\int_x |\Psi(x)|^2 dx = 1$  .

**Exercice 1**

Dans le cadre d'une expérience avec des quantons, on a

$$\Psi(x) = \alpha(\Psi_1(x) + \Psi_2(x))$$

Écrire le terme d'interférence. On notera le complexe conjugué par un astérisque.

Réponse

On a :

$$|\Psi(x)|^2 = \Psi(x) \Psi^*(x)$$

$$|\Psi(x)|^2 = \alpha(\Psi_1(x) + \Psi_2(x)) \alpha^*(\Psi_1(x) + \Psi_2(x))^*$$

$$|\Psi(x)|^2 = |\alpha|^2 (|\Psi_1(x)|^2 + |\Psi_2(x)|^2 + \Psi_1(x) \Psi_2^*(x) + \Psi_1^*(x) \Psi_2(x))$$

Au coefficient de normalisation près, le terme d'interférences est :

$$\text{terme d'interférence} = \Psi_1(x) \Psi_2^*(x) + \Psi_1^*(x) \Psi_2(x)$$

$$\boxed{\text{terme d'interférence} = 2 \Re(\Psi_1(x) \Psi_2^*(x))}$$

On pose :

$$\Psi_1(x) = |\Psi_1(x)| \exp j \varphi_1(x)$$

$$\Psi_2(x) = |\Psi_2(x)| \exp j \varphi_2(x)$$

d'où :

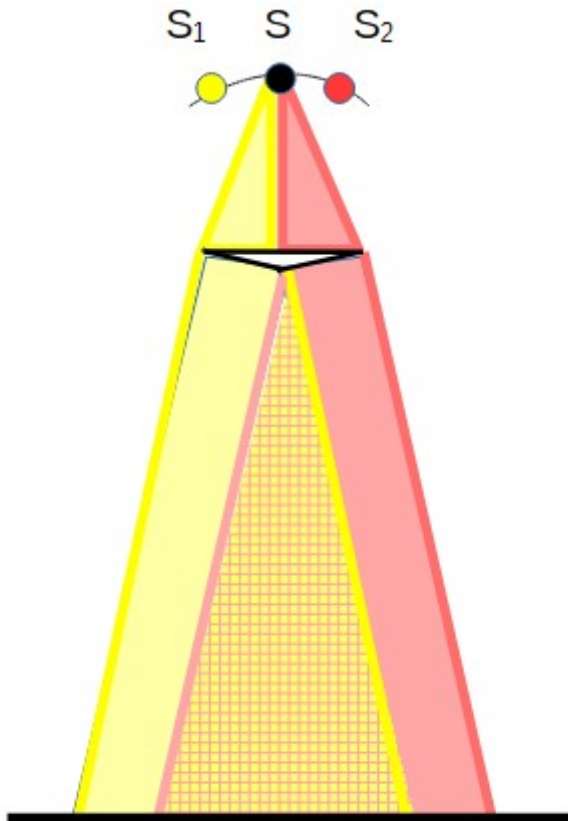
$$\boxed{\text{terme d'interférence} = 2 |\Psi_1(x)| |\Psi_2(x)| \cos \varphi(x)} \quad \text{avec } \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$|\Psi(x)|^2 = |\alpha|^2 (|\Psi_1(x)|^2 + |\Psi_2(x)|^2 + 2 |\Psi_1(x)| |\Psi_2(x)| \cos \varphi(x))$$

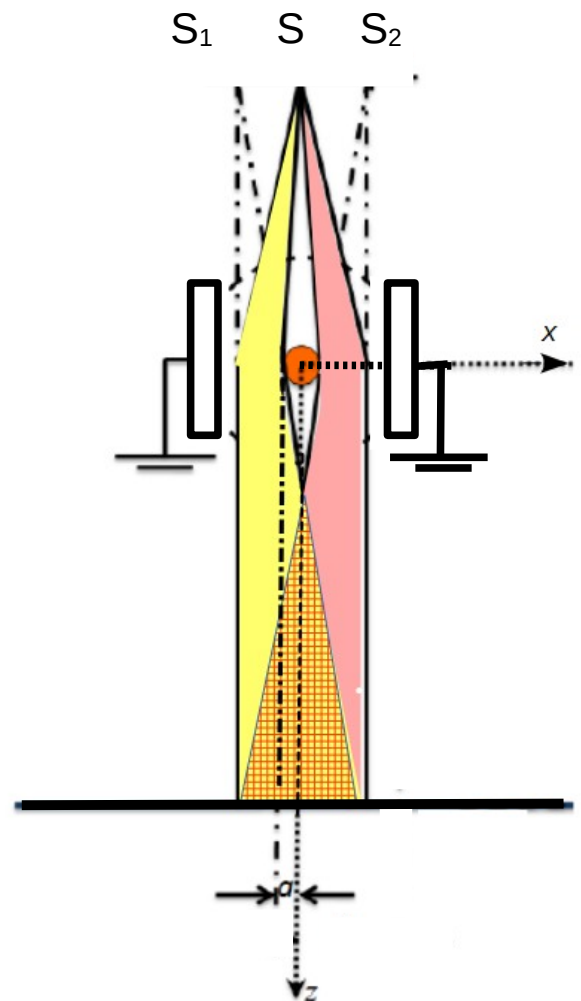
## Exercice 2

L'expérience d'interférence a été réalisée, avec des ondes électroniques, pour la première fois vers 1954 par les allemands Gottfried Möllenstedt et Heinrich Düker. Cette expérience a été améliorée par Jean Faget et Charles Fert en 1957. Elle a été reprise par Akira Tonomura en 1987.

Les électrons sont émis par une source  $S$  et accélérés par une tension  $U=50\text{ kV}$ . Au lieu de deux fentes, le dispositif utilise un biprisme pour réaliser les déviations. Le principe du biprisme électrostatique a été inventé par Möllenstedt et Dücker. Le biprisme produit deux images virtuelles du filament émetteur d'électrons. La figure d'interférence est obtenue par superposition des ondes électroniques arrivant dans le plan d'observation. En ajustant la tension appliquée à la fibre, la figure d'interférence se précise progressivement.



*Biprisme optique de Fresnel*



*Biprisme électrostatique de Möllenstedt*

Le biprisme reçoit le faisceau d'électrons de masse  $m=9,11\times 10^{-31}\text{ kg}$  et de charge  $-e=-1,602\times 10^{-19}\text{ C}$  provenant de la source ponctuelle  $S$ .

Ce biprisme est constitué de deux plaques parallèles portées à la terre avec entre elles un très fin filament de quartz métallisé de rayon  $a=0,5\times 10^{-6}\text{ m}$ , ce dernier présentant un potentiel positif  $V_a=10\text{ V}$  par rapport aux plaques. Une tension de fil de quelques volts est, en effet, suffisante pour réaliser les minuscules déviations requises.

Le potentiel électrostatique dans le biprisme est noté  $V(x, z)$ . Pour simplifier, on supposera que l'équipotentielle  $V=0$  est cylindrique, de rayon  $b=5\text{ mm}$ , coaxiale au fil. La divergence du faisceau incident est très faible, les électrons traversent le biprisme dans une région très voisine du fil.

On rappelle :

$$\hbar = 1,054 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

1) Etude de l'onde électronique incidente

a) Quelle est l'expression de la quantité de mouvement  $p_z$  d'un électron incident ?

b) Quel est l'expression de la vitesse  $v_z$  d'un électron incident ?

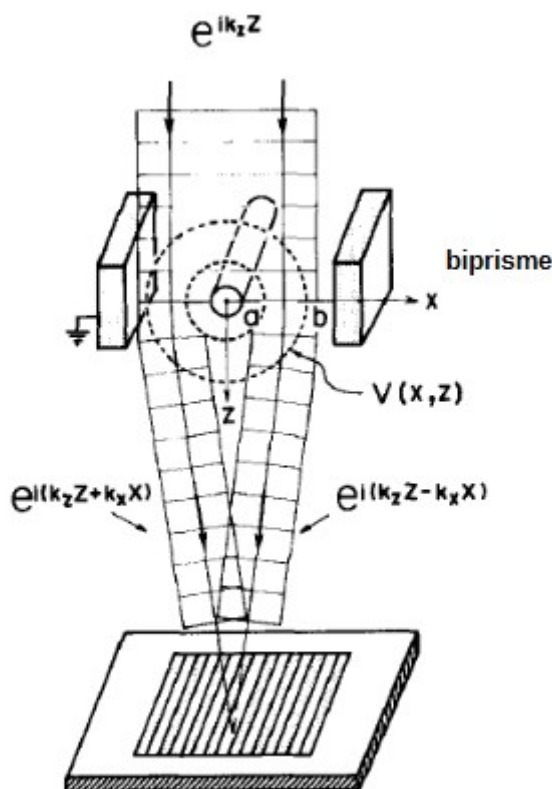
Pour simplifier, on assimile l'onde électronique incidente à une onde plane de vecteur d'onde  $\vec{k} = k_z \vec{u}_z$ . A une constante près, elle s'écrit :  $\exp(i k_z z)$ .

c) Quel est l'expression du vecteur d'onde  $k_z$  de l'onde incidente ?

d) Quelle est la longueur d'onde  $\lambda_{dB}$  de l'onde incidente ?

2) Étude de la déviation des électrons selon  $x$  se produisant dans le biprisme

Les électrons incidents sont déviés par le biprisme sous l'effet de la composante selon  $x$  de la force exercée sur l'électron. La tension  $V_a$  appliquée au biprisme est très faible devant la tension accélératrice  $U$ , la trajectoire incidente est alors très peu affectée par la traversée du biprisme. On considère que la vitesse  $v_z$  des électrons selon  $z$  n'est pas modifiée lors de la traversée du biprisme électrostatique (cf  $V_a \ll U$  et dans le biprisme  $E_z(x, z) = -E_z(x, -z)$ ).



*Ce schéma ne respecte pas les ordres de grandeur.*

*On suppose  $|x|$  très proche de  $a$*

a) Exprimer  $dp_x$  en fonction d'une dérivée du potentiel  $V(x, z)$  en appliquant le principe fondamental à un électron.

b) En déduire  $p_x$  en fonction d'une intégrale sur  $t$  puis sur  $z$  (au cours de la traversée, on rappelle que l'électron reste proche de  $a$ , sa déviation étant très faible)

On revient aux ondes électroniques. Les deux ondes ayant traversé le filament de part et d'autre peuvent être approximées par :  $\exp i(k_z z \pm k_x x)$  à un facteur constant près,

c) Exprimer  $k_x$  après la sortie du biprisme sous forme d'une intégrale (dont on précisera les bornes par la suite).

3) Étude du potentiel dans le biprisme

On suppose que  $V=V(r)$ . On rappelle que le fil est porté au potentiel  $V_a$  et a pour rayon  $a$ . L'équipotentielle  $V=0$  est supposée cylindrique, de rayon  $b$ , coaxiale au fil.

a) Déterminez le potentiel électrique en tout point du biprisme en fonction de  $V_a$ ,  $a$ ,  $b$  et  $r$ .

b) Exprimer  $k_x$  de l'onde déviée en fonction d'une intégrale en utilisant le résultat précédent.

c) Réécrire l'intégrale en faisant le changement de variable  $\theta$  (voir figure). On précisera les bornes dans la question suivante.

d) Préciser les bornes en utilisant par exemple les valeurs numériques de  $a$  et  $b$  et en déduire  $k_x$ .

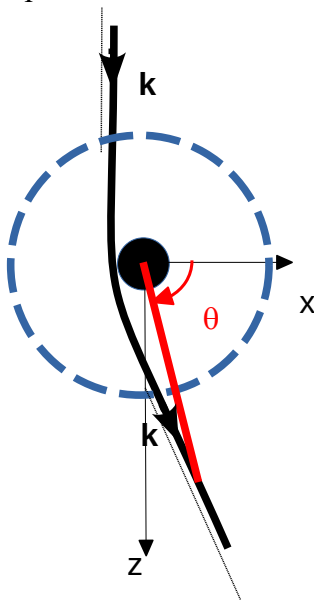


Figure définissant l'angle  $\theta$ .

Remarquer que ce schéma ne respecte pas les ordres de grandeur

4) Calculer la déviation de l'onde à la sortie du biprisme

5) Calculer l'interfrange.

Réponses

1.a)

$K$  désigne l'énergie cinétique d'un électron et  $E_0$  son énergie au repos

On a :

$$E_{\text{totale}}^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$(K + E_0)^2 = p^2 c^2 + E_0^2$$

$$K(2E_0 + K) = p^2 c^2$$

donc :

$$p_z = \frac{1}{c} \sqrt{K(2E_0 + K)}$$

avec  $K = eU$

$$p_z = \frac{1}{c} \sqrt{eU(2mc^2 + eU)}$$

A.N.

$$p_z = \frac{1}{(3,00 \times 10^8)} \sqrt{(1,602 \times 10^{-19}) \times (50 \times 10^3) \times (2 \times (9,11 \times 10^{-31}) \times (3,00 \times 10^8)^2 + (1,602 \times 10^{-19}) \times (50 \times 10^3))}$$

$$p_z = 1,24 \times 10^{-22} \text{ kg m s}^{-1}$$

1.b)

$$p_z = \frac{m v_z}{\sqrt{1 - \frac{v_z^2}{c^2}}}$$

d'où :

$$v_z = \frac{p_z}{\sqrt{(m^2 + \frac{p_z^2}{c^2})}}$$

A.N.

$$v_z = \frac{(1,24 \times 10^{-22})}{\sqrt{(9,11 \times 10^{-31})^2 + \frac{(1,24 \times 10^{-22})^2}{(3,00 \times 10^8)^2}}}$$

$$v_z = 1,24 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

soit 41 % de la vitesse  $c$ .

1.c)

$$p_z = \hbar k_z$$

$$k_z = \frac{p_z}{\hbar}$$

A.N.

$$k_z = \frac{1,24 \times 10^{-22}}{1,054 \times 10^{-34}}$$

$$k_z = 1,17 \times 10^{12} \text{ m}^{-1}$$

1.d)

$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda_{dB}}$$

$$\lambda_{dB} = \frac{2\pi}{k_z}$$

A.N.

$$\lambda_{dB} = \frac{2 \times 3,14}{1,17 \times 10^{12}}$$

$$\lambda_{dB} = 5,35 \text{ pm}$$

2.a)

On applique le principe fondamental selon  $x$  à un électron :

$$F_x = \frac{dp_x}{dt}$$

$$-e E_x(x, z) = \frac{dp_x}{dt}$$

$$e \frac{\partial V(x, z)}{\partial x} = \frac{dp_x}{dt}$$

$$\boxed{dp_x = e \frac{\partial V(x, z)}{\partial x} dt}$$

2.b)

$$dp_x = \frac{e}{v_z} \frac{\partial V(x, z)}{\partial x} dz$$

puisque  $dt = \frac{dz}{v_z}$

On suppose  $|x|$  proche de  $a$  dans le biprisme (le signe est à choisir selon que l'électron passe d'un côté ou de l'autre du fil)

$$\int_0^{p_x} dp_x = \frac{e}{v_z} \int_{\text{entrée dans biprisme}}^z \left. \frac{\partial V(x, z')}{\partial x} \right|_{|x|=a} dz'$$

$$\boxed{p_x = \frac{e}{v_z} \int_{\text{entrée dans biprisme}}^z \left. \frac{\partial V(x, z')}{\partial x} \right|_{|x|=a} dz'}$$

2.c)

Après la sortie du biprisme électrostatique, l'inclinaison de l'onde n'est plus modifiée.  $k_x$  est alors constant.

On s'intéresse ici à l'onde en  $\exp i(k_z z + k_x x)$ . On choisit donc  $x = -a$  (voir figures).

$$\boxed{k_x = \frac{e}{\hbar v_z} \int_{\text{entrée dans biprisme}}^{\text{sortie du biprisme}} \left. \frac{\partial V(x, z')}{\partial x} \right|_{x=-a} dz'}$$

3.a)

On désigne par  $\lambda$  la charge linéique portée par le fil.

En appliquant le théorème de Gauss à un cylindre de hauteur  $H$  et de rayon  $r$ , on obtient

$$E 2\pi r h H = \frac{\lambda H}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

d'où le potentiel :

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln(r) + Cste$$

avec :

$$V_a = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln(a) + C$$

$$0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(b) + C$$

finalement :

$$\frac{V-0}{V_a-0} = \frac{\ln(b)-\ln(r)}{\ln(b)-\ln(a)}$$

$$V = V_a \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}$$

avec  $r = \sqrt{(x^2+z^2)}$

3.b)

Détermination de  $k_x$

$$k_x = \frac{e}{\hbar v_z} \int_{\text{entrée dans biprisme}}^{\text{sortie du biprisme}} \left. \frac{\partial V(x, z')}{\partial x} \right|_{x=-a} dz'$$

avec

$$V = \frac{V_a}{\ln(b/a)} \ln(b/r)$$

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{V_a}{\ln(b/a)} \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{V_a}{\ln(b/a)} \frac{x}{x^2+z^2}$$

$$\left. \frac{\partial V(x, z)}{\partial x} \right|_{x=-a} = \frac{V_a}{\ln(b/a)} \frac{a}{a^2+z^2}$$

$$k_x = \frac{e}{\hbar v_z} \int_{\text{entrée dans biprisme}}^{\text{sortie du biprisme}} \left. \frac{\partial V(x, z')}{\partial x} \right|_{x=-a} dz'$$

$$k_x = \frac{e}{\hbar v_z} \frac{V_a}{\ln(b/a)} \int_{\text{entrée dans biprisme}}^{\text{sortie du biprisme}} \frac{a}{a^2+z'^2} dz'$$

3.c)

On pose

$$\text{tg } \theta = \frac{z}{x} \approx \frac{z}{-a}$$

$$z = -a \text{tg } \theta$$

donc :

$$dz = \frac{-a}{\cos^2 \theta} d\theta$$

et :

$$a^2 + z^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \theta}$$

$$k_x = \frac{e}{\hbar v_z} \frac{V_a}{\ln(b/a)} \int_{\text{entrée dans biprisme}}^{\text{sortie du biprisme}} -d\theta$$

3.d)

On trouve facilement les bornes sur une figure en tenant compte de  $x \approx -a$  et  $a \ll b$ .

On les obtient aussi à partir de la définition de  $\theta$ .

Étude des bornes

A l'entrée :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{z}{x} \approx \frac{-b}{-a}$$

A.N.

$$\operatorname{tg} \theta \approx \frac{b}{a} \approx \frac{5 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-7}} = 10000$$

$$\theta \approx 3 \frac{\pi}{2}$$

A la sortie :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{z}{x} \approx \frac{b}{-a}$$

A.N.

$$\operatorname{tg} \theta \approx \frac{b}{-a} = -10000$$

$$\theta \approx \frac{\pi}{2}$$

finalement :

$$k_x = \frac{e}{\hbar v_z} \frac{V_a}{\ln(b/a)} \int_{3\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -d\theta$$

$$k_x = \frac{\pi e V_a}{\hbar v_z \ln(b/a)}$$

A.N.

$$k_x = \frac{3,14 \times (1,602 \times 10^{-19}) \times 10}{(1,054 \times 10^{-34}) \times (1,24 \times 10^8) \times \ln(10000)}$$

$$k_x = 4,19 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

4)

Si on désigne par  $\alpha$  la déviation de l'onde étudiée, on a

$$\boxed{tg \alpha = \frac{k_x}{k_z}}$$

A.N.

$$tg \alpha = \frac{4,19 \times 10^7}{1,17 \times 10^{12}}$$

$$tg \alpha = 0,036 \times 10^{-3}$$

$$\alpha = 0,036 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\boxed{\alpha = 0,12' \text{ ou } 7,4''}$$

La déviation est effectivement très faible.

5)

Les deux ondes se superposent dans le plan d'observation pour donner (à une constante près)

$$\Psi(x, z) = e^{ik_z z} (e^{ik_x x} + e^{-ik_x x})$$

$$\Psi(x, z) = e^{ik_z z} 2 \cos(k_x x)$$

d'où l'équation des franges d'interférence :

$$|\Psi(x, z)|^2 = 4 \cos^2(k_x x)$$

L'interfrange  $i = \Delta x$  correspond à la période de la fonction précédente

$$k_x i = \pi$$

On obtient :

$$i = \frac{\pi}{k_x}$$

$$\boxed{i = \frac{\hbar v_z}{e V_a} \ln \frac{b}{a}}$$

A. N.

$$i = \frac{(1,054 \times 10^{-34}) \times (1,24 \times 10^8)}{(1,602 \times 10^{-19}) \times 10} \times \ln(10000)$$

$$\boxed{i = 0,075 \mu m}$$

Dans l'expérience réelle, la figure d'interférence du biprisme a été agrandie par des lentilles électroniques et la formation de cette figure d'interférence, électron par électron, a été observée en séquence temporelle sur l'écran d'un système de comptage d'électrons

## II. Inégalité spatiale de Heisenberg

Les inégalités de Heisenberg ne constituent pas une fondation indépendante de la théorie quantique, même si on les désignait par le terme « principe » autrefois. Elles sont une simple conséquence des véritables principes de base. Il ne s'agit donc en rien d'un nouveau principe de la quantique. Elles résultent de la démonstration d'un théorème.

Heisenberg utilisa le mot "Unbestimmtheit", soit "indétermination".

L'inégalité de Heisenberg spatiale ou relation d'indétermination spatiale de Heisenberg s'écrit (on travaille en ordre de grandeur) pour un phénomène unidimensionnel:

$$\Delta x \Delta k_x \gtrsim 1$$

ou :

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar$$

### A. Introduction

En physique classique la détermination de la position  $\vec{r}(t)$  et de la vitesse  $\vec{v}(t)$  d'une particule peut être très précise. On peut donc atteindre facilement la trajectoire du mouvement. En physique quantique, la trajectoire du mouvement n'est plus définie. La particule matérielle est décrite par une fonction d'onde  $\Psi(\vec{r}, t)$  qui représente l'amplitude de probabilité de trouver la particule au point  $\vec{r}$  à l'instant  $t$ . Il semble alors exclu a priori de connaître avec certitude la position  $\vec{r}(t)$  et la vitesse  $\vec{v}(t)$  d'un quanton.

Un quanton n'a pas de position et de vitesse définies par une valeur numérique. Il ne faut pas confondre, malgré le choix d'une même dénomination, les concepts classiques de position, de vitesse, etc. et les concepts quantiques. La théorie quantique a un domaine de validité plus large que la théorie classique qui peut en être vue comme une approximation. Le concept unique de la théorie quantique  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  éclate en deux concepts classiques ( $\vec{p}$  et  $\vec{k}$  séparément). Il faut reconnaître l'originalité, la nouveauté, des concepts quantiques par rapport à leurs analogues classiques dont rien ne garantit qu'ils restent encore valides.

Les inégalités d'Heisenberg résultent de l'emploi des notions de la mécanique classique en dehors de leur domaine d'application. Elles portent sur les largeurs des spectres de position et de quantité de mouvement,

Un quanton ne saurait être caractérisé, en général, par une valeur unique de sa quantité de mouvement mais bien par un spectre de quantité de mouvement. Il a de fait plusieurs valeurs de sa quantité de mouvement, de sa position, etc. Il y a dispersion des valeurs numériques (ou spectres de valeurs) des quantités physiques position et vitesse dans l'état considéré du système.

Le terme relations d'« indéterminations » d'Heisenberg est meilleur que le terme « inégalités » (ou l'ancienne appellation inadaptée « incertitudes ») en ce qu'il renvoie à l'absence de détermination numérique unique d'une propriété physique. Mais il est trop dangereux car d'aucuns pourraient faire un lien avec l'indéterminisme, ce qui est tout à fait hors de propos. En effet, l'état d'une particule matérielle est décrit par une fonction d'onde régie par une équation différentielle déterministe, l'équation de Schrödinger.

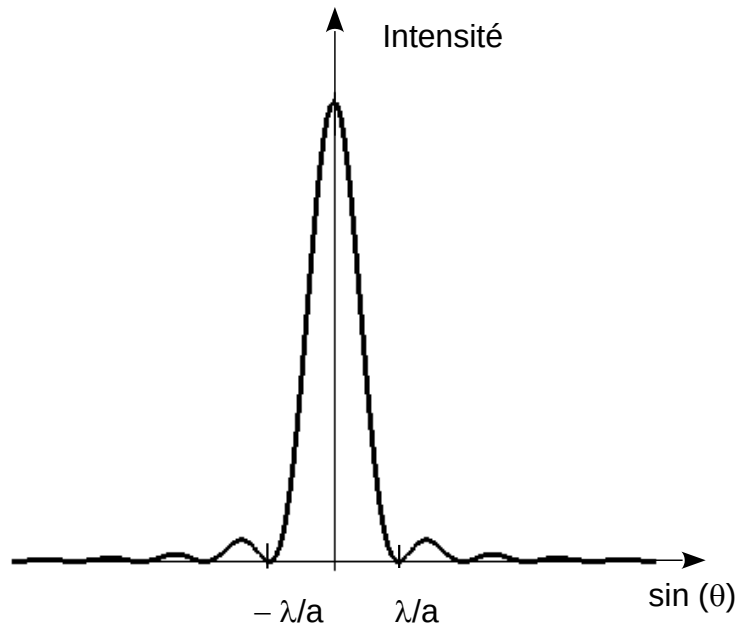
Les relations d'Heisenberg énoncent les limites au-delà desquelles les concepts de la physique classique ne peuvent plus être utilisés.

## B. Analogie : diffraction des ondes lumineuses

### 1 Les résultats de l'expérience

Un faisceau parallèle de lumière est dirigé sur une fente de largeur  $a$  (de l'ordre de  $\lambda$ ). On observe un ensemble de taches sur l'écran : l'onde lumineuse a été diffractée. La demi-tache centrale a une largeur telle que

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{a} \quad (\text{voir figures}).$$



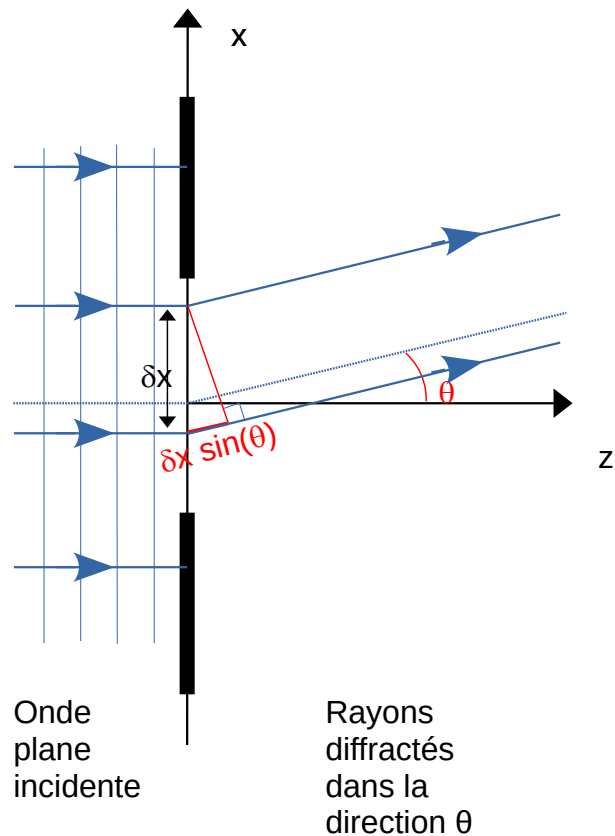
*Intensité diffractée sur l'écran*

Les rayons diffractés interfèrent à l'infini. On considère deux rayons séparés de  $\delta x$  diffractés dans la direction  $\theta$ . La différence de marche entre les deux rayons considérés vaut  $\delta x \sin \theta$ . La somme des deux amplitudes est nulle (rayons en opposition de phase) si  $\delta x \sin \theta = \lambda/2$ .

En choisissant  $\delta x = a/2$  on obtient la direction du premier minimum nul  $a/2 \sin \theta_0 = \lambda/2$  soit  $\sin \theta_0 = \lambda/a$  (en effet, il sera toujours possible de coupler chaque rayon émis par la fente en  $x > 0$  avec un rayon émis par la fente en  $x < 0$  tel que  $\delta x = a/2$ . Ces deux rayons sont eux-aussi en opposition de phase).

La dimension de la tache centrale sur un axe  $\sin \theta$  vaut  $\boxed{2 \sin \theta_0 = 2 \lambda/a}$

- 1) La largeur de la fente ( $a$ ) et la largeur angulaire de la tache de diffraction ( $2\theta_0$ ) sont donc liées.
- 2) Plus la fente est fine, plus la tache de diffraction est large.



## 2 Interprétation quantique de la diffraction par une fente

L'onde plane dont le plan d'onde est limité selon la direction transversale  $Ox$  par un diaphragme subit un éparpillement de sa direction de propagation.

On considère cette expérience réalisée avec des particules matérielles auxquelles on associe une onde de longueur d'onde  $\lambda_{dB}$ . On a par analogie :  $\sin \theta_0 = \lambda_{dB}/a$

a) Une particule passe au travers de la fente si elle est localisée entre  $x = -a/2$  et  $x = a/2$ .

En travaillant en ordre de grandeur, on définit pour la position une indétermination quantique  $\Delta x \approx a$ .

b) En considérant la largeur angulaire de la tache centrale où se concentre la majorité des particules diffractées, on peut écrire que  $\sin \theta$  varie entre  $-\sin \theta_0$  et  $\sin \theta_0$

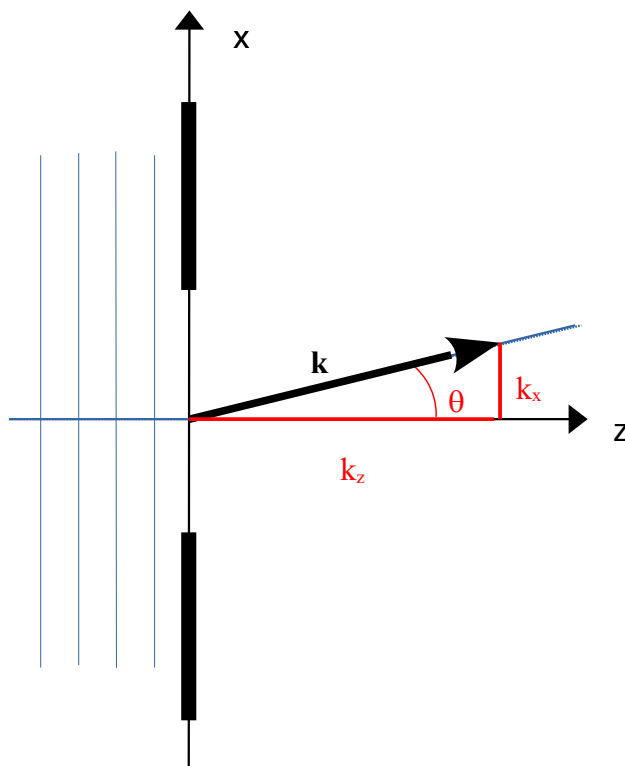
et puisque  $\sin \theta = \frac{k_x}{k}$

$k_x$  varie entre  $-k \sin \theta_0$  et  $k \sin \theta_0$

$k_x$  varie entre  $-\frac{2\pi}{a}$  et  $\frac{2\pi}{a}$

En travaillant en ordre de grandeur, on définit pour la composante selon  $x$  du vecteur d'onde une

indétermination quantique  $\Delta k_x \approx \frac{2\pi}{a}$



On obtient :

$$\Delta x \Delta k_x \approx 2\pi$$

Puis, en reportant  $p_x = \hbar k_x$

$$\Delta x \Delta p_x \approx \hbar$$

Réduire la fente pour diminuer l'indétermination sur  $x$  conduit à une augmentation de l'indétermination sur l'impulsion  $p_x$

On avait indiqué précédemment (en ordre de grandeur) :

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar$$

### C. Commentaires

L'extension spectrale en quantité de mouvement selon  $x$  d'un système quantique est liée à la dimension caractéristique dans la même direction par l'inégalité spectrale.

Cette inégalité se généralise immédiatement à l'espace à trois dimensions, en ordre de grandeur :

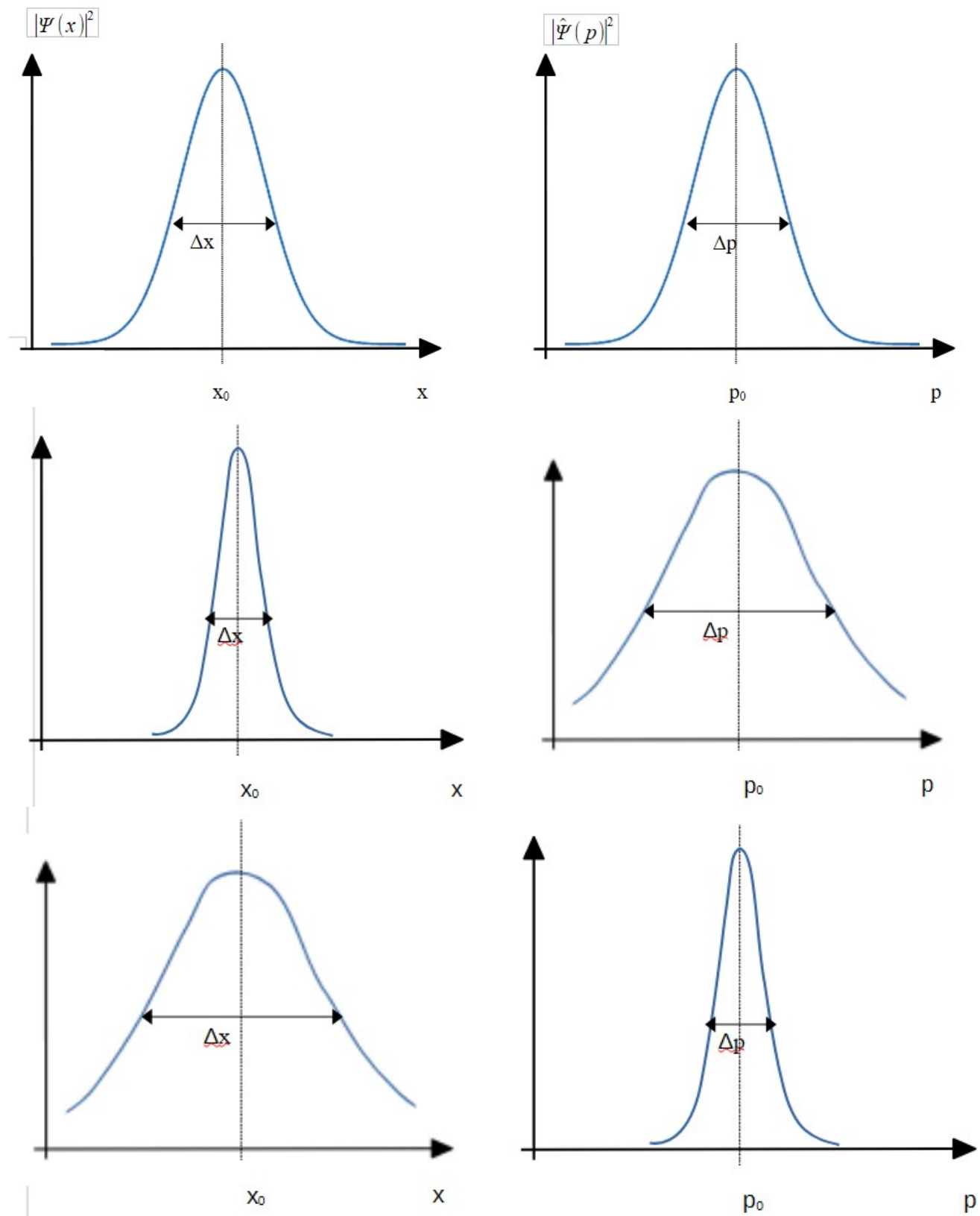
$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar$$

$$\Delta y \Delta p_y \gtrsim \hbar$$

$$\Delta z \Delta p_z \gtrsim \hbar$$

La quantité de mouvement selon  $x$  et la position  $x$  sont des quantités conjuguées dites aussi incompatibles. Cette indétermination est liée à la nature quantique du phénomène observé. Ces inégalités expriment l'impossibilité en quantique de connaître simultanément ces deux grandeurs relatives à un quanton comme un électron par exemple. On ne peut gagner infiniment en certitude sur la position d'un quanton sans perdre en certitude sur son impulsion.

Dans certains cas très particuliers, il est cependant possible d'attribuer à un système quantique, par exemple, une quantité de mouvement bien déterminée selon une direction, caractérisée par une valeur numérique unique. Le système est dans un état propre de quantité de mouvement  $\Delta p_x = 0 \quad \Delta x = \infty$ . C'est le cas pour un système libre, sans interactions, qui évolue en restant caractérisé par une valeur propre de quantité de mouvement.



On considère ici des spectres gaussiens pour  $x$  (et aussi pour  $p$ ). La fonction d'onde est une superposition d'ondes planes. On observe que  $\Delta x$  et  $\Delta p$  varient en sens inverse.

## D. Complément : notion de dispersion statistique

Pour mesurer la dispersion des  $N$  valeurs  $x_i$  autour de leur moyenne  $\langle x \rangle$ , on définit en statistiques la notion d'écart type  $\sigma$

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i \langle x \rangle + \langle x \rangle^2)} \\ &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2} \\ \sigma &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}\end{aligned}$$

Considérons un quanton dans des conditions spécifiées. On imagine de réaliser  $2N$  copies identiques du système :  $N$  copies où l'on mesure la position  $x$  de la particule et les  $N$  autres copies où l'on mesure la quantité de mouvement  $p_x$ . On obtient deux séries de  $N$  nombres contenant les résultats des mesures  $[x_1, x_2, x_3, \dots, x_N]$  et  $[p_{x,1}, p_{x,2}, p_{x,3}, \dots, p_{x,N}]$ .

Pour  $N$  grand, on peut calculer la position et la quantité de mouvement moyennes :

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \\ \langle p_x \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_{x,i}\end{aligned}$$

On calcule aussi la moyenne des carrés de la position et la moyenne des carrés de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \\ \langle p_x^2 \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_{x,i}^2\end{aligned}$$

On obtient les variances

$$\begin{aligned}\text{var } x &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\ \text{var } p_x &= \langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2\end{aligned}$$

et finalement les écarts type

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sqrt{\text{var } x} \\ \sigma_{p_x} &= \sqrt{\text{var } p_x}\end{aligned}$$

On fera :

$$\begin{aligned}\Delta x &= \sigma_x \\ \Delta p_x &= \sigma_{p_x}\end{aligned}$$

**Exercice 1**

Pour explorer des domaines de dimensions inférieures à  $d$  avec des quantons servant de sondes, il faut évidemment disposer de quantons localisés dans un domaine de dimensions  $\Delta x < d$ .

1) Que peut-on en déduire concernant la largeur  $\Delta p_x = \Delta p$  du spectre en quantité de mouvement ? Quelle est alors, en ordre de grandeur, la valeur minimale de  $p$  ?

2) En déduire que l'énergie des quantons doit croître pour atteindre cet objectif (d'où la construction d'accélérateurs de plus en plus puissants)

3) On suppose alors des quantons de très haute énergie  $E$ . Montrer que  $E$  est inversement proportionnel à  $d$ .

Réponses

1)

En ordre de grandeur, on a vu :

$$\Delta x \Delta p_x > \hbar$$

On a donc ici :

$$\Delta p > \frac{\hbar}{d}$$

Le spectre en quantité de mouvement doit donc s'étendre au minimum jusque :

$$p \approx \frac{\hbar}{d}$$

2)

L'énergie croît avec la quantité de mouvement puisque :

$$E = (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}$$

3)

Pour les hautes énergies, on peut négliger l'énergie au repos donc :

$$E \approx pc$$

$$E \approx \frac{\hbar c}{d}$$

## Exercice 2 : stabilité de l'atome d'hydrogène

Un atome ne doit pas exister en physique classique. Un électron qui tournerait autour du noyau serait équivalent à un courant électrique. Il émettrait des ondes électromagnétiques et perdrait alors de l'énergie pour se retrouver finalement sur le noyau. C'est la quantique qui permet de comprendre le non effondrement de l'atome.

On considère l'atome le plus simple (atome d'hydrogène). C'est l'inégalité de Heisenberg ( $\Delta r \Delta p \gtrsim \hbar$ ) qui place une borne inférieure à la distance moyenne de l'électron au proton dans l'atome.

1) Exprimer, dans le cadre de la mécanique classique, l'énergie totale  $E$  de l'électron d'un atome d'hydrogène en fonction de sa distance  $r$  au noyau et du module  $p$  de sa quantité de mouvement. Pour une écriture concise, utiliser l'abréviation  $q^2 = e^2 / 4\pi\epsilon_0$ .

2) On admet qu'une expression analogue est valable dans le cadre de la mécanique quantique à condition que l'inégalité de Heisenberg soit respectée.  $r$  représente alors la dimension approximative de la zone occupée par le mouvement de l'électron qui reste confiné autour du noyau et  $p$  l'ordre de grandeur du module de sa quantité de mouvement. De plus, on admet que les dispersions sur  $r$  et  $p$  sont du même ordre de grandeur que leurs modules, c'est à dire  $\Delta r \approx r$  et  $\Delta p \approx p$ .

Montrer que énergie potentielle et énergie cinétique sont désormais corrélées et en déduire la stabilité de l'atome en mécanique quantique.

3) En déduire que  $E \gtrsim f(r)$  où  $f(r)$  est une fonction de  $r$  où n'intervient plus la quantité de mouvement  $p$ . Montrer que  $E$  admet un minimum.

4) Chercher la valeur de  $r$  notée  $a_0$  pour laquelle on obtient ce minimum et calculer la valeur de l'énergie minimale  $E_0$  (en eV) correspondante.

### Réponses

1)

$$E = E_{\text{cinétique}} + E_{\text{potentielle}} = \frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{r}$$

2)

$$E_{\text{potentielle}} = -\frac{q^2}{r}$$

$$E_{\text{cinétique}} = \frac{p^2}{2m}$$

avec

$$\Delta r \Delta p \gtrsim \hbar$$

$$r p \gtrsim \hbar$$

$$p \gtrsim \hbar / r$$

donc :

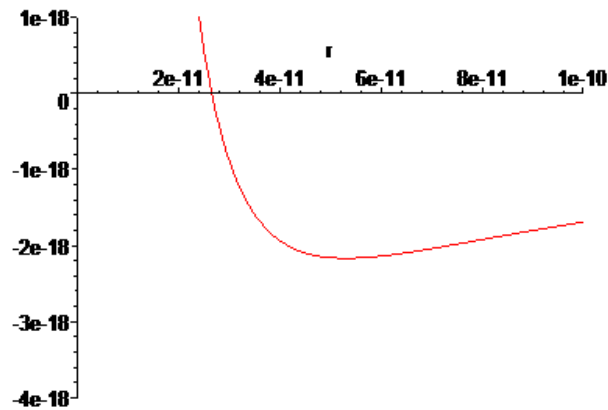
$$E_{\text{cinétique}} \gtrsim \frac{\hbar^2}{2mr^2}$$

Si la taille de l'atome décroît, l'énergie cinétique augmente mais l'énergie potentielle diminue et réciproquement. Ce mécanisme explique la stabilité de l'atome. Cette corrélation est spécifiquement quantique.

3)

$$E \gtrsim \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{q^2}{r}$$

$$f(r) = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{q^2}{r}$$

tracé de  $f(r)$ 

Cette expression admet un minimum pour:

$$\frac{df(r)}{dr} = \frac{-\hbar^2}{mr^3} + \frac{q^2}{r^2} = 0$$

$$r_0 = a_0 = \frac{\hbar^2}{mq^2}$$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 53 \text{ pm}$$

On obtient pour l'état stable de l'atome d'hydrogène ou état fondamental un rayon  $a_0$  (c'est la rayon de l'atome de Bohr).

On trouve aussi :

$$E_0 = -\frac{mq^4}{2\hbar^2}$$

$$E_0 = -\frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2}$$

$$E_0 (\text{eV}) = -\frac{me^3}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2} = -13,6 \text{ eV}$$

On a obtenu le résultat exact. En effet, l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène vaut  $13,6 \text{ eV}$  .

Cette coïncidence est accidentelle, étant donné la grossièreté de nos estimations.

# Chap III : Quantification de l'énergie

## I. Le modèle planétaire de Niels Bohr

Bohr propose en 1913 un modèle cohérent avec l'observation des spectres de raies d'émission et d'absorption des atomes. Il applique ce modèle à l'atome le plus simple c'est-à-dire l'atome d'hydrogène.

### A. Les hypothèses de Bohr

Bohr fait les hypothèses suivantes:

a) Les trajectoires de l'électron autour du noyau sont circulaires. Toutes les orbites ne sont pas autorisées. Sur les orbites autorisées, l'électron n'émet pas de rayonnement. L'émission de lumière par l'atome n'est pas liée au mouvement de l'électron sur son orbite, Les orbites autorisées sont stables. Elles sont dites "orbites stationnaires".

b) Le moment cinétique orbital de l'électron est quantifié. Sur l'orbite  $n$  le moment cinétique prend la valeur  $L_n = n\hbar$  ( $n$  entier positif).

c) L'électron échange de l'énergie avec l'extérieur sous forme de lumière quand il change de trajectoire circulaire. C'est en émettant ou en absorbant un photon que l'électron peut passer d'une orbite à une autre. L'émission ou l'absorption d'une radiation électromagnétique lors de la transition d'un électron d'un état énergétique initial  $E_{n_i}$  vers un état énergétique  $E_{n_f}$  se fait par un quantum d'énergie  $h\nu$ .

### B. La réussite du modèle

Malgré son caractère étrange, mi-classique et mi-quantique, le modèle hybride de Bohr s'avère extrêmement fécond.

a) Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène justifie la formule trouvée par Balmer en 1885 de manière empirique, afin de trouver la répartition et la valeur des fréquences de chacune des quatre raies visibles du spectre de l'hydrogène. La formule identifie chaque raie du spectre d'émission avec la transition entre deux niveaux d'énergie des électrons. Les quatre raies visibles sont les suivantes:

$\lambda = 656,5 \text{ nm}$  située dans le rouge,

$\lambda = 486 \text{ nm}$  située dans le bleu-vert,

$\lambda = 434 \text{ nm}$  située dans le violet,

$\lambda = 410 \text{ nm}$  située aussi dans le violet.

Le modèle de Bohr permet d'obtenir les valeurs correctes pour les longueurs d'onde émises ou absorbées par les atomes hydrogénoïdes.

b) Ce modèle a été une étape historique très importante pour introduire la quantification au niveau de l'atome. Le modèle de Bohr prédit la quantification de l'énergie et la quantification du moment cinétique de l'électron. Le modèle de Bohr a joué un rôle important pour la naissance de la physique quantique. En parvenant à expliquer les spectres atomiques, il a validé les idées de base sur lesquelles la physique quantique s'est construite.

### C. L'évolution de Bohr vers la quantique

Conscient que le travail qu'il a effectué jusque-là, autour de son modèle semi-classique, a l'allure d'un « bricolage désordonné », Bohr entreprend la construction d'une véritable théorie de l'atome formant un tout parfaitement cohérent. Les processus atomiques demandent une explication radicalement nouvelle. Vers 1925, Bohr abandonne son modèle d'atome. Niels Bohr contribue grandement à la naissance de la mécanique quantique. Lui-même n'a jamais enseigné à ses étudiants la théorie dite du « modèle de Bohr » !

**Exercice**

On étudie le modèle de Bohr pour l'atome d'hydrogène.

- a) l'électron a une trajectoire circulaire autour du noyau  
 b) le moment cinétique orbital de l'électron vaut  $L_n = n\hbar$  ( $n$  entier positif)

On supposera de plus ici que le noyau est infiniment lourd.

1) En utilisant uniquement l'hypothèse a, exprimer, en mécanique classique, l'énergie totale  $E_n$  de l'électron soit en fonction de  $r_n$  (rayon de l'orbite  $n$ ), soit en fonction de  $v_n$  (vitesse de l'orbite  $n$ ), en faisant intervenir les paramètres  $n$ ,  $\hbar$ ,  $e$  (charge électrique élémentaire),  $\epsilon_0$ , et  $m$  (masse de l'électron).

2) En introduisant alors l'hypothèse b, montrer que  $r_n = n^2 a_0$  où  $a_0$  désigne le rayon de Bohr qu'on évaluera numériquement.

3) Exprimer l'énergie mécanique  $E_n$  de l'électron sur l'orbite  $n$  et montrer qu'elle se met sous la

forme :  $E_n = -\frac{R_y}{n^2}$  où  $R_y$  est la constante énergétique de Rydberg. Calculer  $R_y$  en eV.

4) L'électron retombe de l'orbite  $n_i > 2$  à l'orbite  $n_f = 2$ . Calculer les longueurs d'onde émises dans le visible.

5) Expliquer d'après ce modèle le spectre d'absorption de l'atome d'hydrogène.

**Réponses**

1)

Dans le cas de la trajectoire circulaire  $n$ , on a :

$$E_{\text{cinétique}} = \frac{1}{2} m v_n^2$$

$$E_{\text{potentielle}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$$

Le principe fondamental s'écrit :

$$m \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}$$

$$m v_n^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \text{ soit :}$$

$$2 E_{\text{cinétique}} = -E_{\text{potentielle}}$$

En considérant l'énergie totale

$$E = E_{\text{cinétique}} + E_{\text{potentielle}}$$

$$E = \frac{E_{\text{potentielle}}}{2} = -E_{\text{cinétique}}$$

soit pour l'orbite  $n$

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{2} m v_n^2$$

2)

Le moment cinétique est quantifié :

$$L_n = m r_n v_n = n \hbar$$

donc :

$$m r_n v_n = n \hbar$$

On a obtenu avec le principe fondamental:

$$m r_n v_n^2 = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0}$$

On fait le rapport de ces deux dernières équations d'où :

$$v_n = \frac{1}{n} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 \hbar}$$

puis

$$r_n = n^2 \frac{4 \pi \epsilon_0 \hbar^2}{m e^2}$$

$$r_n = n^2 a_0 \quad \text{avec :}$$

$$a_0 = \frac{4 \pi \epsilon_0 \hbar^2}{m e^2}$$

$$a_0 = 53 \text{ pm}$$

3)

$$E_n = - \frac{e^2}{8 \pi \epsilon_0 r_n}$$

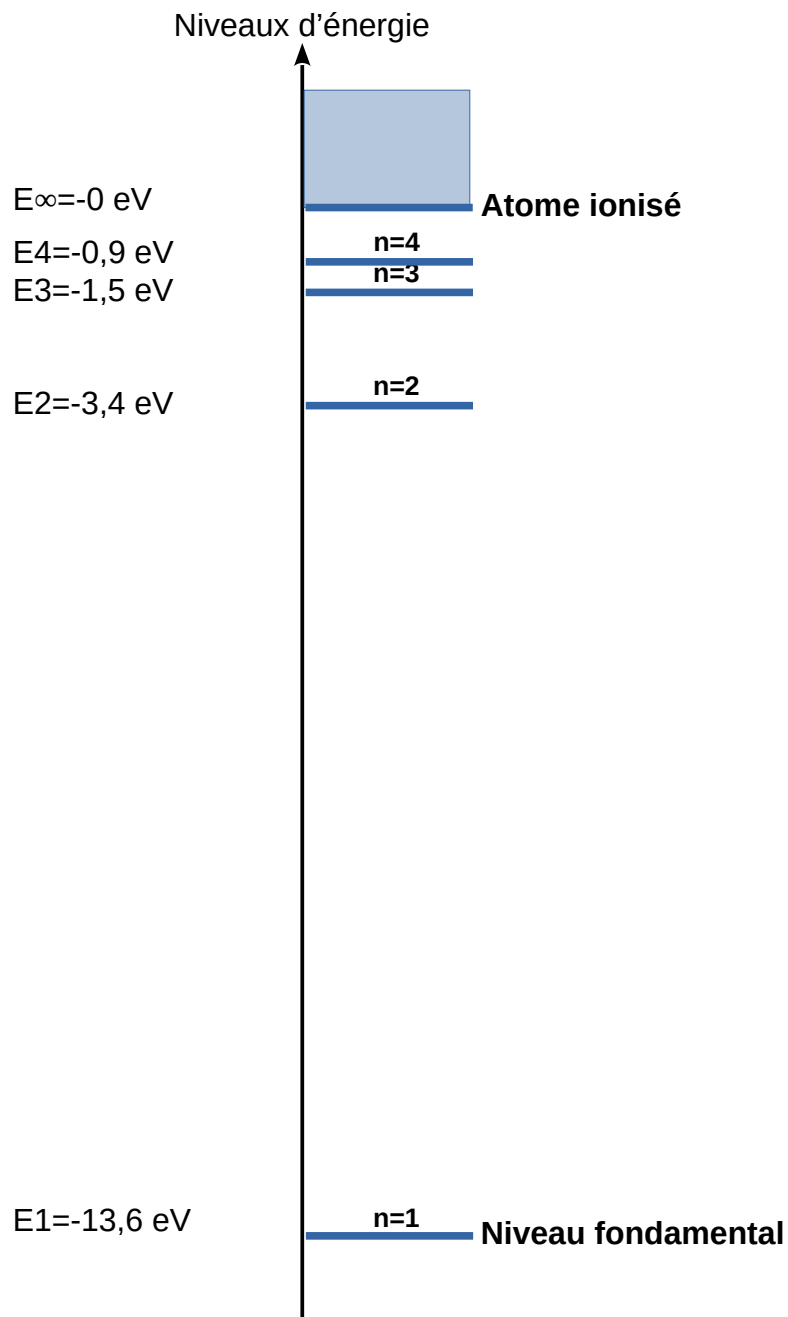
$$E_n = - \frac{1}{n^2} \frac{m}{2} \left( \frac{e^2}{\hbar (4 \pi \epsilon_0)} \right)^2$$

$$E_n = - \frac{1}{n^2} R_y \quad \text{avec :}$$

$$R_y = \frac{m}{2} \left( \frac{e^2}{\hbar (4 \pi \epsilon_0)} \right)^2$$

$$R_y = 13,6 \text{ eV} \quad \text{ou}$$

$$R_y = 2,18 \times 10^{-18} \text{ J}$$



*Les premiers niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène*

4)  
 Dans l'hypothèse de Bohr, il y a émission d'une radiation lumineuse quand il y a un transfert de l'orbite  $n_i$  à l'orbite  $n_f < n_i$ .

$$E_i = -\frac{1}{n_i^2} R_y$$

$$E_f = -\frac{1}{n_f^2} R_y$$

La variation d'énergie de l'électron vaut :

$$\Delta E = E_f - E_i$$

$$\Delta E = -R_y \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) < 0$$

L'énergie est émise sous la forme d'un photon d'énergie  $h\nu$

$$-\Delta E = hc/\lambda$$

Formule générale :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{R_y}{hc} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

A.N.

Pour la série de Balmer,  $n_f=2$  d'où les raies émises

$$n_i=3 \quad \lambda=0,656 \mu m$$

$$n_i=4 \quad \lambda=0,486 \mu m$$

$$n_i=5 \quad \lambda=0,434 \mu m$$

$$n_i=6 \quad \lambda=0,410 \mu m$$

5)

Un électron absorbe de l'énergie (spectre d'absorption) sous forme de photon et accède à un niveau d'énergie supérieur si et seulement si l'énergie du photon est égale à la différence d'énergie entre l'état initial et l'état final. L'atome se trouve alors dans un état excité, état moins stable. Il va donc rapidement émettre un photon (spectre d'émission) pour se retrouver dans un état d'énergie plus stable.

## D. Les limites du modèle

Le modèle de Bohr n'est pas complètement satisfaisant.

1) La quantification du moment cinétique orbital n'est pas justifiée. Cette condition ne trouve aucune justification dans la physique classique. Il s'agit donc d'une hypothèse ad hoc pour rendre compte des résultats expérimentaux : stabilité de l'atome, spectres de raies.

*(La notion de trajectoire n'existe plus en mécanique quantique. La bonne description actuelle de l'atome passe par la physique quantique qui conduit à l'impossibilité d'attribuer une trajectoire à l'électron mais plutôt une probabilité pour qu'il soit en un endroit donné. Le principe d'incertitude de Heisenberg est violé, qui stipule que la position et la quantité de mouvement d'un électron ne peuvent pas être déterminées toutes deux avec précision).*

*(Pour expliquer cette quantification, de Broglie suggérera que chaque orbite électronique dans l'atome est une onde stationnaire. Il faut que l'onde reboucle sur elle-même. La longueur de l'orbite  $n$  doit alors vérifier :*

$$L_n = n \lambda_{dB,n}$$

$$2\pi r_n = n \frac{h}{mv_n}$$

$$mv_n r_n = n \hbar$$

2) Lorsqu'un électron suit une trajectoire circulaire, il possède alors une accélération non nulle centripète, or l'électromagnétique classique montre que dans ce cas l'électron doit rayonner un champ électromagnétique puisque l'électron est une particule chargée, et donc perdre de l'énergie. Ceci conduit alors à ce que l'électron doit finir par "s'écraser" sur le noyau. L'atome ne doit donc pas être stable dans ce modèle. Pour remédier à ce problème Bohr a émis l'hypothèse que les électrons ne rayonnaient pas sur leurs orbites mais uniquement lorsqu'ils changeaient d'orbite.

*(En mécanique quantique, les inégalités de Heisenberg permettent de comprendre pourquoi l'électron ne tombe pas sur le noyau).*

3) Le modèle de Bohr ne s'applique pas au spectre des atomes plus complexes. Il ne décrit avec précision que

le comportement des atomes hydrogénoïdes. Il ne peut pas expliquer les spectres des atomes comportant plus d'un électron.

4) Le modèle de Bohr n'explique pas la modification des raies spectrales en présence d'un champ magnétique (effet Zeeman).

5) Le modèle de Bohr n'explique pas la modification des raies spectrales en présence d'un champ électrique (effet Stark).

## II. Modèle du puits de potentiel unidimensionnel de profondeur infinie

---

Ce type de potentiel est une première approximation pour décrire toute particule quantique confinée.

On étudie le cas d'une particule dans un puits de potentiel aux parois infiniment raides et hautes. On néglige tout phénomène dissipatif.

On a donc :

$$E_p = +\infty \text{ si } x < 0$$

$$E_p = 0 \text{ si } 0 \leq x \leq a$$

$$E_p = +\infty \text{ si } x > a$$

### A. Étude classique du problème

La particule ne peut sortir du puits.

On pose les conditions initiales suivantes en  $t=0$  :

$$x = x_0 = 0$$

$$v = v_0 > 0$$

Il y a conservation de l'énergie mécanique totale

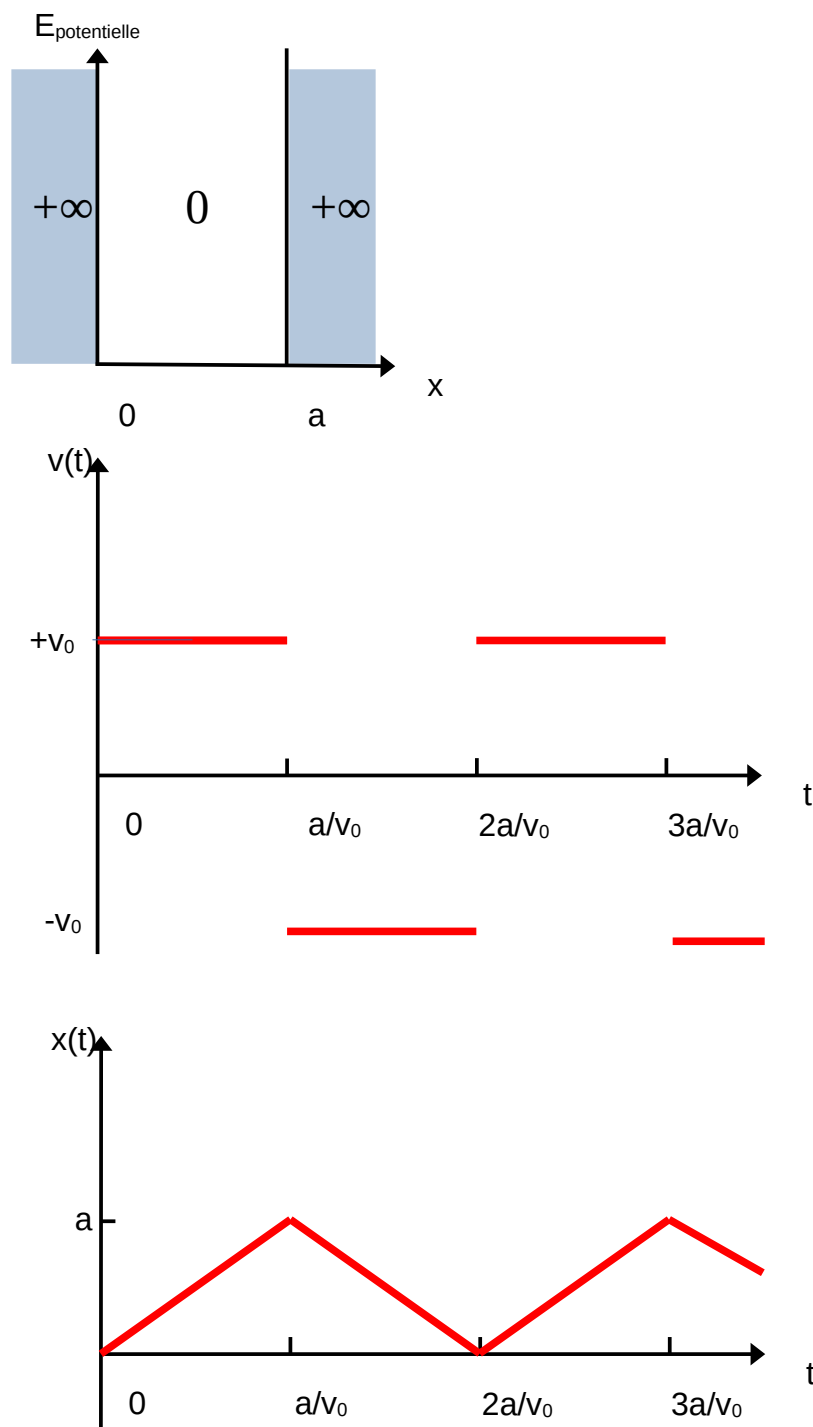
$$E = E_{\text{cinétique}} = E_{\text{cinétique en } t=0}$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$v = \pm v_0$$

La particule rebondit indéfiniment sur les parois du puits.

Toutes les valeurs d'énergie sont possibles (en fonction de la valeur de  $v_0$ ). Si  $v_0 = 0$ , la particule reste au repos dans le puits et son énergie est nulle.



*Étude classique du problème de la particule dans un puits de potentiel de profondeur infinie*

## B. Étude quantique du problème

La particule quantique est astreinte à se déplacer dans un espace unidimensionnel limité ( $x \in [0; a]$ ).

### 1 Existence d'une énergie minimale de confinement

#### a) Expression en utilisant l'inégalité de Heisenberg

On utilise l'inégalité de Heisenberg en ordre de grandeur :

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$$

On a

$$\Delta x \approx a$$

d'où

$$\Delta p \gtrsim \hbar/a$$

L'énergie potentielle est nulle donc :

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$E \approx \frac{(\Delta p)^2}{2m}$$

$$E \gtrsim \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

$$E_{\min} \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

(On obtient ici cette énergie au niveau fondamental à un facteur près).

L'état fondamental possède donc une énergie strictement positive, qui est une énergie cinétique, résultant du confinement. Cette énergie minimale ne peut être que de l'énergie cinétique puisque l'énergie potentielle est nulle. Ainsi, alors qu'une particule classique piégée dans un puits de potentiel infiniment profond peut avoir une énergie arbitrairement petite, nous constatons que l'énergie d'une particule quantique ne peut pas être inférieure au niveau fondamental d'énergie. On ne peut pas obtenir une particule au repos enfermée dans une boîte.

### b) Effet du confinement sur l'énergie cinétique

Cette énergie en  $1/a^2$  est appelée « énergie de confinement ». Si  $\Delta x$  diminue alors  $\Delta p$  augmente et donc l'énergie cinétique augmente. Le confinement de la particule quantique donne lieu à une augmentation de son énergie cinétique. Une particule confinée « bouge » et plus elle est confinée plus elle « bouge » ( si tant est qu'il soit possible de parler de « mouvement pour une particule quantique).

L'énergie de confinement devient nulle pour un puits de largeur infinie (on est alors dans le cas d'une particule libre)

## 2 Expression des niveaux d'énergie

L'onde associée à la particule fait des allers- retours, ces ondes se superposent de manière constructive et font apparaître un phénomène d'onde stationnaire.

La probabilité de sortir du puits est nulle pour la particule.

$$|\Psi(x < 0, t)|^2 = 0 \quad \text{soit} \quad |\Psi(x < 0, t)| = 0$$

$$|\Psi(x > a, t)|^2 = 0 \quad \text{soit} \quad |\Psi(x > a, t)| = 0$$

Par continuité, la densité de probabilité de présence s'annule donc au bord du puits infini.

$$|\Psi(x = 0, t)|^2 = 0 \quad \text{soit} \quad |\Psi(x = 0, t)| = 0$$

$$|\Psi(x = a, t)|^2 = 0 \quad \text{soit} \quad |\Psi(x = a, t)| = 0$$

Le module de la fonction d'onde s'annule aux deux extrémités en  $x=0$  et en  $x=a$ .

On a déjà rencontré une situation analogue en physique classique à propos des ondes stationnaires (expérience de la corde de Melde de longueur  $L$ ). On a dans ce cas pour un mode propre :

$$y_n(x, t) = f_n(x) \exp(-i\omega_n t)$$

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

Les solutions pour  $f_n(x)$  sont des sinusoides présentant un nœud en  $x=0$  et un nœud en  $x=a$ .

Ici, on obtient comme dans l'expérience de la corde de Melde :

$$\Psi_n(x, t) = \Phi_n(x) \exp(-i \frac{E_n}{\hbar} t)$$

$$a = n \frac{\lambda_{dB}}{2}$$

Les solutions pour  $\Phi_n(x)$  (fonction d'onde indépendante du temps des états stationnaires) sont des sinusoides présentant un nœud en  $x=0$  et un nœud en  $x=a$ .

Pour une particule non relativiste puisque l'énergie potentielle étant nulle, on a alors :

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

avec :

$$p = \frac{h}{\lambda_{dB}}$$

Les niveaux d'énergie sont donnés par:

$$E = \frac{h^2}{2m \lambda_{dB}^2}$$

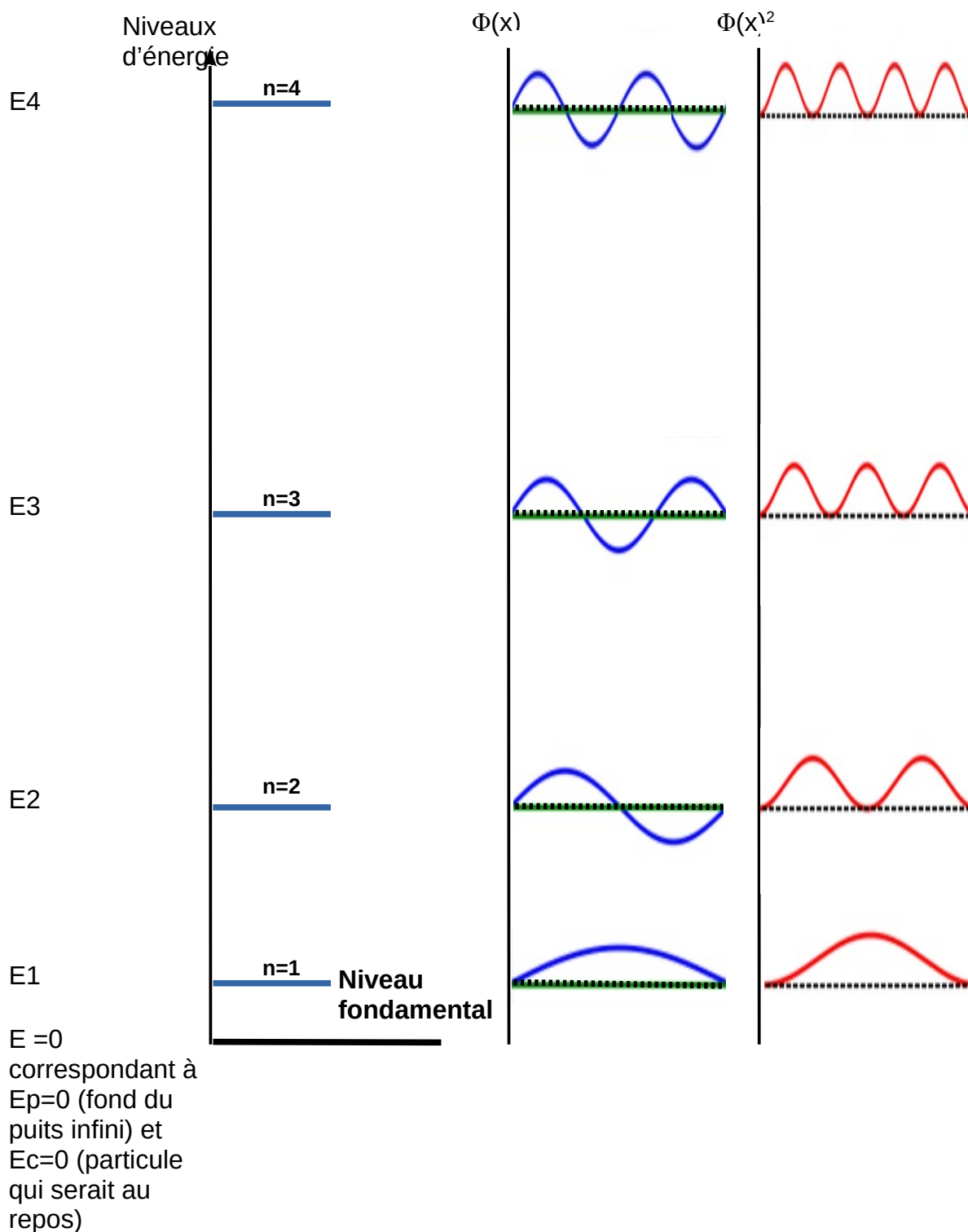
$$E = \frac{4 \pi^2 \hbar^2}{2m (2a/n)^2}$$

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m a^2}$$

On obtient par ailleurs :

$$E_{min} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m a^2}$$

(Ce qui correspond, à une constante près, à la valeur approximative obtenue par l'inégalité de Heisenberg en ordre de grandeur).



### 3 Lien entre confinement spatial et quantification

Quand une onde est confinée dans un espace de largeur  $a$ . Cette onde va interférer avec elle-même à cause des réflexions successives (exemple de la corde de Melde). Ainsi, seules les longueurs d'ondes accordées à  $a$  vont interférer constructivement et donc exister. La quantification est un phénomène purement ondulatoire. Elle apparaît lorsqu'on impose certaines conditions aux limites, c'est-à-dire lorsque l'on confine l'onde à une région limitée de l'espace. La mécanique quantique n'implique pas, de manière générale, la quantification de l'énergie. Pour une particule libre, la valeur de l'énergie peut être quelconque (mais positive).

Seul le confinement implique la quantification.

# ***APPROCHE ONDULATOIRE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE (MATHS SPÉ)***

**(en cours de rédaction)**